The Physics of Quantum Fields

量子場の物理

●M.ストーン［著］
●樺沢 宇紀［訳］

Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

Translation from the English language edition:
The Physics of Quantum Fields by Michael Stone

序

本書は一般的な場の量子論と多体物理の入門のためのテキストであり，その内容は1985年から1997年にかけてUniversity of Illinois at Urbana-Champaignで，2期連続の講座として行った講義に基づいている．講義を聴講した学生の関心の対象は，素粒子物理，核物理から量子光学，凝縮系物理まで多岐にわたっていた．

本書は他の本格的なテキストとは異なり，広範囲の事項を完全に網羅したものではない．私は多くの学生が共通して難しく感じるような基本的な問題だけを集中的に扱った．広汎な計算手法の習得に主眼を置くような講義では，より詳細で専門的なテキスト，たとえば素粒子理論家向けのPeskin and Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*や，物性理論家向けの専門書として有名なFetter and Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*などを併用して内容を補うのが適当であろう．

本書を2期にわたる講義に用いる場合，

第1期：1 − 11章

第2期：12 − 18章

とするのが自然な配分である．

前半の11章は，伝統的な量子力学的演算子の流儀に基づいて記述してある．これは本書が広範囲の学生を対象としているためである．もし素粒子理論の学生だけを対象とするのならば，私は第1章を径路積分にあてたであろう．しかし一般の学生にとっては，支障のない範囲において，伝統的なハミルトニアン形式の量子力学を踏襲した方が，内容に馴染みやすいものと思われる．前半の各章では，この流儀に基づいて，簡潔に場の理論を紹介した．

本書の後半では径路積分の手法を採用した．径路積分は単にFeynman規則やWard恒等式を効率的に導くだけの道具ではなく，繰り込みや臨界現象，非摂動的現象の理解のためにも不可欠なものである．

本書は凝縮系物理に携わる学生を主な対象としたわけではないが，凝縮系から多くの例を引いた．これは著者の関心が，この数年来，格子ゲージ理論を介して，高

エネルギー物理から結晶格子までの間を行きつ戻りつしたことの反映である．しかし理由はもうひとつある．それは，凝縮系は具体的に見たり感じたりすることができるものなので，感覚的な把握が容易だという事情である．私は量子色力学におけるカイラル対称性の破れの概念よりも，超流体における自発的な対称性の破れの概念を理解するほうがやさしいと信じている．また凝縮系ではハミルトニアンが明確に定義され，場の量子論の手法によって，測定結果と直接比較できる結果が与えられる．相対論的な系は通常このようになっておらず，正則条件を満たす解の中から特定の解を選ぶために，恣意的に補助条件を導入しなければならない．このような事情は，それ自体として何ら問題はないが，初学者をしばしば混乱させる原因になる．かのKen Wilsonも凝縮系の臨界現象に注目することによって，初めて摂動論における発散の起源を理解するに至ったのである．

Urbana, Illinois
October, 1999

Michael Stone

目 次

序 **i**

第1章 離散系 **1**

1.1 1次元結晶 1

1.1.1 基準振動 1

1.1.2 調和振動子 4

1.1.3 基準振動の消滅演算子・生成演算子 5

1.2 連続極限 7

1.2.1 和と積分 7

1.2.2 連続場 8

第2章 相対論的スカラー場 **13**

2.1 単位系と計量 13

2.2 Klein-Gordon方程式 14

2.2.1 相対論的規格化 14

2.2.2 内積 17

2.2.3 複素スカラー場 19

2.3 対称性とNoetherの定理 20

2.3.1 内部対称性 20

2.3.2 時空の対称性 23

第3章 摂動論 **27**

3.1 相互作用 27

3.2 摂動論 28

3.2.1 相互作用描像 28

3.2.2 伝播関数と時間順序積 29

3.3 Wickの定理 32

3.3.1 正規積 32
3.3.2 Wickの定理 33
3.3.3 応用 35

第4章 Feynman規則 **41**
4.1 Feynmanダイヤグラム 41
4.1.1 時空におけるダイヤグラム 41
4.1.2 運動量空間のダイヤグラム 45
4.2 散乱の理論 47
4.2.1 散乱断面積 49
4.2.2 不安定な粒子の崩壊 52

第5章 ループ・ユニタリー性・解析性 **53**
5.1 S行列のユニタリー性 53
5.2 解析的S行列 56
5.2.1 解析性の起源 56
5.2.2 ユニタリー性と分岐切断線 57
5.2.3 共鳴と粒子の寿命 59
5.3 ループのダイヤグラム 62
5.3.1 Wick回転 62
5.3.2 Feynmanのパラメーター積分公式 64
5.3.3 次元正則化 65

第6章 形式的展開 **69**
6.1 Gell-Mann Lowの定理 69
6.2 Lehmann-Källénスペクトル表示 72
6.3 LSZ簡約公式 75
6.3.1 外線の処理 75
6.3.2 入射状態・放出状態 76
6.3.3 Borchers類 79

第7章 Fermi粒子 **81**
7.1 Dirac方程式 81
7.2 スピノル・テンソル・カレント 82
7.2.1 双一次形式 82

7.2.2 保存則 84
7.3 空孔とDiracの海 84
7.3.1 正と負のエネルギー 84
7.3.2 空孔 87
7.4 量子化 89
7.4.1 正規積と時間順序積 91

第8章 量子電磁力学 93

8.1 Maxwell方程式の量子化 93
8.1.1 ハミルトニアン形式 93
8.1.2 軸性ゲージ 94
8.1.3 Lorentzゲージ 95
8.2 量子電磁力学におけるFeynman規則 99
8.2.1 Møller散乱 100
8.3 Ward恒等式とゲージ不変性 103
8.3.1 Ward恒等式 103
8.3.2 応用 104

第9章 固体中の電子 109

9.1 第二量子化 109
9.2 Fermi気体とFermi液体 112
9.2.1 1粒子密度行列 112
9.2.2 線形応答 115
9.2.3 ダイヤグラムの方法 116
9.2.4 応用 118
9.3 電子とフォノン 127

第10章 非相対論的Bose粒子系 131

10.1 Bose粒子場 131
10.2 自発的な対称性の破れ 132
10.3 希薄なBose気体 136
10.3.1 Bogoliubov変換 136
10.3.2 場の方程式 139
10.3.3 量子化 141
10.3.4 超流動のLandau臨界条件 143

10.3.5 常流体と超流体の密度 144

10.4 荷電Bose粒子系 147

10.4.1 Gross-Pitaevskii方程式 147

10.4.2 渦糸 148

10.4.3 流体力学との関係 150

第11章 有限温度 **153**

11.1 分配関数 153

11.2 世界線 154

11.3 松原の和 157

第12章 径路積分 **161**

12.1 1粒子の量子力学 161

12.1.1 実時間 161

12.1.2 Euclid時間 164

12.2 ゲージ不変性と演算子の順序 166

12.3 1粒子系の相関関数 168

12.4 場の相関関数 170

12.5 Gauss積分と自由場 172

12.5.1 実場 172

12.5.2 複素場 174

12.6 摂動論 175

第13章 汎関数の方法 **179**

13.1 生成汎関数 179

13.1.1 有効作用 182

13.2 Ward恒等式 188

13.2.1 Goldstoneの定理 189

第14章 Fermi粒子系の径路積分 **195**

14.1 Berezin積分 195

14.1.1 簡単な超対称性 198

14.2 Fermi粒子系のコヒーレント状態 201

14.3 超伝導 203

14.3.1 有効作用 206

第15章 格子場の理論 209

15.1 Bose粒子場 209
15.2 酔歩 213
15.3 相互作用とBose凝縮 214
15.3.1 回転不変性 216
15.4 格子フェルミオン 219
15.4.1 カイラル格子フェルミオンの欠如 225

第16章 繰り込み群 227

16.1 伝送行列 227
16.1.1 連続極限 231
16.1.2 2次元Ising模型 232
16.2 スピンのブロック化と繰り込み群 233
16.3 相関関数 239

第17章 場と繰り込み 241

17.1 自由場固定点 241
17.2 Gauss模型 244
17.3 一般的な方法 248
17.4 非線形 σ 模型 249
17.4.1 繰り込み 254
17.4.2 繰り込み群方程式の解 257
17.5 $\lambda\varphi^4$ の繰り込み 259

第18章 1/N展開法 263

18.1 O(N) 線形 σ 模型 263
18.2 1/N展開 267
18.2.1 線形および非線形の σ 模型 270

付 録 277

A 相対論的状態の規格化 277
B 場の交換子 279
C 次元正則化 280
C.1 解析接続と積分 280
C.2 伝播関数 281

D スピノルと六分儀の原理 282
D.1 ガンマ行列の構築 283
D.2 基本定理 283
D.3 カイラリティー 285
D.4 Spin($2N$), Pin($2N$), SU(N) $\subset$ SO($2N$) 285
E 不定計量 286
F フォノンと運動量 288
G 量子力学における行列式 290

参考図書 (訳者補遺) 293

訳者あとがき 297

索引 300

第 1 章　離散系

1.1　1 次元結晶

まず手初めに，振動する結晶の量子力学について議論しよう．結晶は肉眼で巨視的に捉えると連続体のように見える．しかし十分に高倍率の顕微鏡で観察すると，結晶は化学的な“ボンド”(結合手) で相互に結合した原子によって構成されていることが分かる．原子とボンドを“ボール”と“ばね”のように考え，結晶を調和振動子の集合体と見なすことができる．調和振動子の量子力学を理解していれば，これを結晶に適用するのは難しいことではない．本章ではこの問題を扱う．

1.1.1　基準振動

弾性定数と振動モードを幾種類も持つ現実の結晶をそのまま扱うと，話が繁雑になるので，ここでは単純な 1 次元結晶のモデルを考察する．

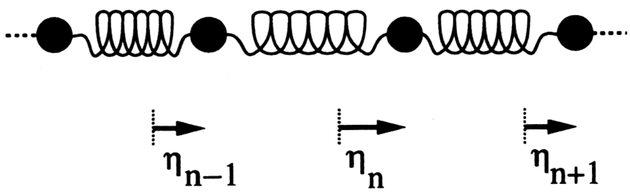


図 1.1　1 次元結晶.

各原子が単位質量を持つものとし，x 軸上に間隔 a で並んでいるそれぞれの原子に，整数のラベル n をあてがうことにする．各原子は x 方向だけに自由に振動できるものと考えて縦波を扱う．n 番目の原子の，平衡位置からの変位を η_n と書く．

運動の議論を導く最短の道筋として，ラグランジアン (Lagrangian) を用いることにする．通常の力学系と同様に，ラグランジアンは運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の差で与えられる．“調和結晶”(harmonic crystal) の総ポテ

ンシャル V は $\frac{1}{2}\lambda(\eta_n - \eta_{n+1})^2$ のような項の総和で表される．λ は弾性定数である．したがってラグランジアンは次のようになる．

$$L = T - V = \sum_n \left\{ \frac{1}{2}\dot{\eta}_n^2 - \frac{\lambda}{2}(\eta_n - \eta_{n+1})^2 \right\} \tag{1.1}$$

Lagrangeの運動方程式として，各々の η_n に関する式が次のように与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_n} = 0 \tag{1.2}$$

ここから古典的な運動方程式が求まる．

$$\ddot{\eta}_n = \lambda(\eta_{n+1} + \eta_{n-1} - 2\eta_n) \tag{1.3}$$

この式は複素平面波解を持つ．

$$\eta_n = e^{ikn - i\omega t} \tag{1.4}$$

ここで各振動数 ω は，

$$\omega^2 = 2\lambda(1 - \cos k) \tag{1.5}$$

を満たす．

長波長の極限 $k \ll 1$ では，この分散関係を，

$$\omega^2 = \lambda k^2 \tag{1.6}$$

と近似できる．すなわち長波長音波の音速は $\sqrt{\lambda}$ である．

次章では，各々の粒子をそれぞれの平衡位置近傍にピン止めするような調和ポテンシャル $\frac{1}{2}\Omega^2\eta_n^2$ を考慮しなければならなくなる．この場合 L は，

$$L = \sum_n \left\{ \frac{1}{2}\dot{\eta}_n^2 - \frac{\lambda}{2}(\eta_n - \eta_{n+1})^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\eta_n^2 \right\} \tag{1.7}$$

となり，分散関係は次のようになる．

$$\omega^2 \;\rightarrow\; 2\lambda(1 - \cos k) + \Omega^2 \approx \lambda k^2 + \Omega^2 \tag{1.8}$$

ここで付加したポテンシャル項は，スペクトルに“ギャップ”を生じさせる．この場合，Ω 以下の振動数の解は存在しない．

基準振動モード (normal mode) を決めるために，境界条件を課さなければならない．$n+N$ 番目の原子を n 番目の原子と同じものとして扱う“周期境界条件”を

導入しよう．η_n は η_{n+N} と等しくなければならない．したがって e^{ikN} が1でなければならず，許容される k の値は，次のように与えられる．

$$k_m = \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1.9}$$

変位の基準振動への展開は，次のように表される．

$$\eta_n(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ A_m e^{ik_m n - i\omega_m t} + A_m^* e^{-ik_m n + i\omega_m t} \right\} \tag{1.10}$$

変位は実数なので，それぞれの複素解に対応する複素共役解を付加した．

ラグランジアン (1.1) を用いて，変位 η_n に対して正準共役な運動量が次のように定義される．

$$\pi_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} = \dot{\eta}_n \tag{1.11}$$

量子力学では変位 η_n とその正準共役変数 π_n が，次の交換関係を持つ演算子 $\hat{\eta}_n$ と $\hat{\pi}_n$ になる．

$$[\hat{\eta}_n, \hat{\pi}_m] = i\hbar\delta_{nm} \tag{1.12}$$

式(1.10)から共役運動量を導くと次のようになる．

$$\pi_n(t) = \dot{\eta}_n(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ -i\omega_m A_m e^{ik_m n - i\omega_m t} + i\omega_m A_m^* e^{-ik_m n + i\omega_m t} \right\} \tag{1.13}$$

量子力学において時間発展を導入する方法は一意的ではない．Schrödinger[1)]描像 (Schrödinger picture) ではHilbert空間内の状態ベクトルに時間依存性を持たせ，演算子は時間に依存しないものとする．これは初等量子力学のコースで採用される方法であり，我々が式(1.12)のような式を書くときには，大抵この描像を念頭に置いている．しかし場の理論では，演算子があらわに時間に依存するHeisenberg[2)]描像 (Heisenberg picture) の方が便利である．任意の演算子 $\hat{O}$ は次のように振舞う．

$$\hat{O}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{1.14}$$

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}] \tag{1.15}$$

Heisenberg描像の下で演算子の交換関係を見るときには，演算子の時刻を特定する必要がある．式(1.12)のような交換関係を得るためには，同時刻の演算子を用い

1)Erwin Schrödinger：1887年8月12日Vienna生まれ．1961年1月4日Viennaにて死去．1933年ノーベル物理学賞．

2)Werner Karl Heisenberg：1901年12月5日生まれ．1976年2月1日Münchenにて死去．1932年ノーベル物理学賞．

た交換子を用意しなければならない.

$$\left[\hat{\eta}_n(t), \hat{\pi}_m(t)\right] = i\hbar\delta_{nm} \tag{1.16}$$

互いに異なる時刻に属する演算子の交換子を評価するには，力学系の解を求めておく必要がある.

1.1.2 調和振動子

Heisenberg描像を用いた調和振動子の力学を復習しておこう.

単位質量を持ち，角振動数が ω の調和振動子のハミルトニアン (Hamiltonian) は,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{x}^2) \tag{1.17}$$

である．演算子 $\hat{x}(t)$ と $\hat{p}(t)$ は，次の同時刻交換関係を満たす.

$$\left[\hat{x}(t), \hat{p}(t)\right] = i\hbar \tag{1.18}$$

運動方程式は次のように与えられる.

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}] = \hat{p}(t) \tag{1.19}$$

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}] = -\omega^2\hat{x}(t) \tag{1.20}$$

第 1 式を t で微分し，その右辺の $\dfrac{d\hat{p}}{dt}$ に第 2 式を代入すると，次式が得られる.

$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \omega^2\hat{x} = 0 \tag{1.21}$$

このように Heisenberg演算子 $\hat{x}(t)$ は，対応する古典的変数 $x(t)$ が従う運動方程式と全く同じ式を満足する.

式(1.21)の解をそのまま正弦関数や余弦関数で表すこともできるが，次のように演算子 $\hat{a}(t)$ と $\hat{a}^\dagger(t)$ を導入する方が，後々のために都合がよい.

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\right) \tag{1.22}$$

$$\hat{p}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(-i\omega\hat{a}(t) + i\omega\hat{a}^\dagger(t)\right) \tag{1.23}$$

すなわち,

$$\hat{a}(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}(t) + i\frac{\hat{p}(t)}{\omega}\right) \tag{1.24}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}(t) - i\frac{\hat{p}(t)}{\omega}\right) \tag{1.25}$$

である．$\hat{x}$，$\hat{p}$ の交換関係から，これらの演算子の同時刻交換関係を求めると，

$$\left[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)\right] = 1 \tag{1.26}$$

となる．ハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right) \tag{1.27}$$

と書き直すことができ，$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の時間依存性が次のように求まる．

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{a}(t)\right] = -i\omega\hat{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \tag{1.28}$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger(t)\right] = +i\omega\hat{a}^\dagger(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{+i\omega t} \tag{1.29}$$

これ以降 $\hat{a}(0)$ を $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger(0)$ を $\hat{a}^\dagger$ と書くことにする．場の理論では，これらの演算子をそれぞれ“消滅演算子”および“生成演算子”と呼ぶ．

$\hat{x}(t)$ と $\hat{p}(t)$ も時間依存性を明示することができる．

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{+i\omega t}\right) \tag{1.30}$$

$$\hat{p}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(-i\omega\hat{a}e^{-i\omega t} + i\omega\hat{a}^\dagger e^{+i\omega t}\right) \tag{1.31}$$

これらをハミルトニアンの式に代入すると，

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.32}$$

となり，ハミルトニアンは古典力学の場合と同様に，時間には依存しない．

1.1.3 基準振動の消滅演算子・生成演算子

調和振動子の例に倣って，1次元結晶の力学変数を次のように表してみよう．

$$\hat{\eta}_n(t) = \sum_{m=0}^{N-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m}}\frac{1}{\sqrt{N}}\left\{\hat{a}_m e^{ik_m n - i\omega_m t} + \hat{a}_m^\dagger e^{-ik_m n + i\omega_m t}\right\} \tag{1.33}$$

$$\hat{\pi}_n(t) = \sum_{m=0}^{N-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m}}\frac{1}{\sqrt{N}}\left\{-i\omega_m\hat{a}_m e^{ik_m n - i\omega_m t} + i\omega_m\hat{a}_m^\dagger e^{-ik_m n + i\omega_m t}\right\} \tag{1.34}$$

ここで $[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn}$ とする．同時刻交換子 $[\hat{\eta}_n(t), \hat{\pi}_m(t)]$ が正しく与えられるかどうかを確認しなければならないが，係数 $\sqrt{\dfrac{\hbar}{2\omega}}$ は調和振動子と同じものであり，基準振動の規格化を考慮して係数 $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ を加えてある．

この種の和の計算を扱う際に，有限Fourier級数に関する次の恒等式が有用である．

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{ik_m(n-n')} = N\delta_{nn'} \tag{1.35}$$

上式は等比数列の和の公式を用いて容易に証明できる．

簡単な計算により，必要とされる交換関係，

$$\left[\hat{\eta}_n(t), \hat{\pi}_m(t)\right] = i\hbar\delta_{nm} \tag{1.36}$$

が成立していることが確認できる．

1次元結晶のハミルトニアンも $\hat{a}_m$ と $\hat{a}_m^\dagger$ を用いて書き直すことができる．

$$\hat{H} = \sum_n \left\{\frac{1}{2}\hat{\pi}_n^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\hat{\eta}_n - \hat{\eta}_{n+1}\right)^2\right\} = \sum_{m=0}^{N-1} \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right) \tag{1.37}$$

これで結晶のモデルに関する基本的なことはすべて理解できる．調和振動子の基底状態に $\hat{a}^\dagger$ を作用させてHilbert空間を構築する方法を思い起こし，それを結晶の場合へ一般化すればよい．調和振動子の演算子表示で $\hat{a}|0\rangle = 0$ となるような基底状態 $|0\rangle$ の存在を仮定すると，

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{1.38}$$

は $\langle n|n\rangle = 1$ のように規格化されたエネルギー固有状態となる．

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \tag{1.39}$$

Von Neumann[3)]は調和振動子の演算子の代数が一意的であることを証明した．

結晶の状態を表すHilbert空間は，調和振動子空間の N 個の複製によるテンソル積となる．これは複雑なものに見えるかもしれないが，唯一必要な仮定は，

$$\hat{a}_m|0\rangle = 0, \quad {}^\forall m \tag{1.40}$$

を満たす状態 $|0\rangle$ が存在するということである．そうすると，

$$|n_0, n_1, \ldots, n_{N-1}\rangle = \frac{(\hat{a}_0^\dagger)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}}\frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\cdots\frac{(\hat{a}_{N-1}^\dagger)^{n_{N-1}}}{\sqrt{n_{N-1}!}}|0\rangle \tag{1.41}$$

という状態が，次のハミルトニアンの下での，規格化された固有状態となる．

$$\hat{H} = \sum_{m=0}^{N-1} \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right) \tag{1.42}$$

[3)] Johann (John) von Neumann：1903年12月3日Budapest（ハンガリー）生まれ．1957年2月8日Washington DCにて死去．

式(1.41)の状態の固有値は,

$$E = E_0 + n_0\hbar\omega_0 + n_1\hbar\omega_1 + \ldots + n_{N-1}\hbar\omega_{N-1} \tag{1.43}$$

と表される．E_0 は,

$$E_0 = \sum_m \frac{1}{2}\hbar\omega_m \tag{1.44}$$

である．式(1.41)のような状態によって張られる空間をFock空間と呼ぶ.

各モードの励起をフォノン (phonon) と呼ぶ．第1モードに n_1 個のフォノンがあり，第2モードに n_2 個のフォノンがあり・・・・と言った具合に，各モードのフォノン数を指定して，系全体の状態を決めることができる．占有数 (occupation number) n_n は任意に大きく選べるので，フォノンはBose統計に従う．我々はフォノンを仮に“素粒子”と考えることにする．フォノンは物理学に現れる“素粒子”(中間子，光子など) と同様に，エネルギーと運動量を持ち，ハミルトニアンに適当な相互作用項を加えれば，相互散乱もする．場の量子論の根幹には，場 (ここでは $\hat{\eta}(x,t)$) と粒子の双対性の概念がある.

1.2 連続極限

1.2.1 和と積分

ここで結晶構造を“ぼかして”，結晶全体を巨視的な連続弾性体のようにとらえ直してみよう．原子の変位 η_n を実数 x を引き数とする場 $\eta(x)$ に置き換える．巨視的な系を扱うので，N は非常に大きな数でなければならない.

もちろん $x = na$ であるが，我々は空間的にゆっくり変化する関数に関心があるので $f(an)$ を x の滑らかな関数と見なす．結晶の“ぼかし”の基本となる“規則”は,

$$a\sum_n f(an) \ \to \ \int f(an)adn \ \to \ \int f(x)dx \tag{1.45}$$

であり,

$$a\sum_n f(na)\frac{1}{a}\,\delta_{nm} = f(ma) \ \to \ \int f(x)\delta(x-y)dx = f(y) \tag{1.46}$$

となる．Diracのデルタ関数は,

$$\frac{\delta_{nn'}}{a} \ \to \ \delta(x-x') \tag{1.47}$$

という対応関係から現れる．x 空間における発散量 $\delta(0)$ は $n = n'$ のときに生じるので，格子間隔の逆数，もしくは単位体積あたりの基準振動の数と解釈できる.

Fourier級数和について,

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{ik_m(n-n')} = N\delta_{nn'} \tag{1.48}$$

という関係を思い起こそう．$k_m = \dfrac{2\pi m}{N}$ である．$k_m n = (k_m/a)na \to kx$ としたいので，連続的な波数が $k_m/a \to k$ となるように k を決めなければならない．式(1.48)において無次元の k_m は0から 2π までの値をとる．しかしこの範囲をゼロについて対称に $-\pi$ から $+\pi$ までとすることもできる．そうすると連続な k の範囲は $-\dfrac{\pi}{a}$ から $+\dfrac{\pi}{a}$ になる．よって,

$$\delta(x-x') \;\leftarrow\; \frac{\delta_{nn'}}{a} = \frac{1}{Na}\sum_m e^{ik_m(n-n')} \;\to\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-x')} \tag{1.49}$$

となる．最後の積分の上限と下限は $\pm\dfrac{\pi}{a}$ でなければならないが，我々の関心の対象となる関数の変化が a のスケールで緩慢であれば，積分の上限および下限を無限大にできる．これが，よく用いられているデルタ関数のFourier積分表示である．

上記の取扱いは，場の理論においてFourier変換をする際に x と k を非対称に扱う実例となっている．dk に常に 2π を付けて $\dfrac{dk}{2\pi}$ とするが，これは単位体積あたりの波数 k と $k+dk$ の間の基準振動の数という物理的な意味を持つ．つまり,

$$\sum_m F(k_m/a) = \sum_k F(k) \;\leftrightarrow\; Na\int\frac{dk}{2\pi}F(k) = (\text{Volume})\int\frac{dk}{2\pi}F(k) \tag{1.50}$$

のように書ける．

$\delta(k-k')$ のFourier積分は,

$$\int dx\, e^{i(k-k')x} = 2\pi\delta(k-k') \tag{1.51}$$

である．$2\pi\delta(0)$ は (k 空間において) 発散するが，これは系の体積 $\int dx = V$ という意味を持つ．ここでも $\delta(k)$ に 2π を付けることが物理的な意味を持つ．

$\delta(0)$ は x 空間と k 空間において，その物理的解釈が異なることに注意されたい．

1.2.2 連続場

結晶場のラグランジアンを連続場へ移行させると,

$$L = T - V = \int dx\left\{\frac{1}{2}\rho_0\dot{\eta}(x)^2 - \frac{\kappa}{2}(\partial_x\eta)^2\right\} \tag{1.52}$$

と書ける．ρ_0 は平衡状態における質量密度，$\eta(x)$ は変位場である．κ は 1 次元の“体積”弾性率に相当する．場の理論では定数 (ここでは ρ_0) を場に含めて，運動エネルギー項の係数を単純に $\dfrac{1}{2}$ とおくのが普通である．このためには，場を $\varphi(x) = \sqrt{\rho_0}\,\eta(x)$ と定義すればよい．更に $\kappa/\rho_0 = c^2$ としてピン止め項 ($\propto \varphi^2$) を付加すると，ラグランジアンは次のようになる．

$$L = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{c^2}{2}(\partial_x \varphi)^2 - \frac{m^2c^4}{2}\varphi^2 \right\} \tag{1.53}$$

最小作用の法則から運動方程式を導くことができる．慣例の通りに作用を $S = \int dt L$ と定義する．運動方程式は，

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x,t)} = 0 \tag{1.54}$$

という式で与えられる．汎関数微分 $\delta/\delta\varphi$ (Fréchet 微分と呼ばれることもある) は次のように定義される．

$$\delta S = \int dx dt \frac{\delta S}{\delta \varphi(x,t)} \delta\varphi(x,t) \tag{1.55}$$

ここで扱う連続場の例では，部分積分を実行して境界項を省くと，

$$\delta S = \int dx dt \left(-\partial_{tt}^2 \varphi + c^2 \partial_{xx}^2 \varphi - m^2 c^4 \varphi \right) \delta\varphi \tag{1.56}$$

となり，運動方程式が次のように求まる．

$$\partial_{tt}^2 \varphi = c^2 \partial_{xx}^2 \varphi - m^2 c^4 \varphi \tag{1.57}$$

ピン止め項を除けば，これは波面速度 c の単純な波動方程式である．

この式の基本解として，

$$\varphi(x,t) = e^{ikx - i\omega_k t} \tag{1.58}$$

という平面波解を与えることができる．ω_k は，

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + m^2 c^4 \tag{1.59}$$

の正の平方根とする．

量子化のためにハミルトニアンが必要である．まず正準共役な運動量の場を次のように定義する．

$$\pi(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} = \dot{\varphi}(x) \tag{1.60}$$

この汎関数微分を評価するにあたり，通常のラグランジアンの力学と同様に φ と $\dot{\varphi}$ を互いに独立な変数として扱う．それから，この共役な場を用いて $H = \sum p\dot{q} - L$ のようにハミルトニアンを定義するが，ここでは和の代わりに，連続変数 x に関する積分が必要となる．

$$H = \int dx \big(\pi(x)\dot{\varphi}(x) - L\big)$$
$$= \int dx \left\{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{c^2}{2}(\partial_x \varphi)^2 + \frac{m^2c^4}{2}\varphi^2\right\} \tag{1.61}$$

互いに共役な量子場を，それぞれ次のように書くことができる．

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\left\{\hat{a}_k e^{+ikx-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx+i\omega_k t}\right\} \tag{1.62}$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\left\{-i\omega_k \hat{a}_k e^{+ikx-i\omega_k t} + i\omega_k \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx+i\omega_k t}\right\} \tag{1.63}$$

ここで，

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 2\pi\delta(k-k') \tag{1.64}$$

であり，共役な場の同時刻交換関係は，

$$\big[\hat{\varphi}(x,t), \hat{\pi}(x',t)\big] = i\hbar\delta(x-x') \tag{1.65}$$

となる．この交換関係の下で，Heisenbergの運動方程式は，古典的な運動方程式と正確に一致する．

場の量子力学的ハミルトニアン $\hat{H}$ を $\hat{a}_k$ と $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて書くこともできる．

$$\hat{H} = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2}\hbar\omega_k \big(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger\big) \tag{1.66}$$

この表式を得るにあたり，$\hat{\varphi}$ を展開するときに現れる $\hat{a}_k^\dagger$ や $\hat{a}_k$ の積の順序を変えないように注意しなければならない．式(1.64)と $\mathrm{Vol} = 2\pi\delta(k=0)$ により，上の式を，基底エネルギー項 E_0 と，励起項の和の形に表すことができる．

$$\hat{H} = E_0 + \int \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k \big(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k\big) \tag{1.67}$$

$$E_0 = (\mathrm{Vol})\int \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2}\hbar\omega_k = \sum_{\text{modes}} \frac{1}{2}\hbar\omega_k \tag{1.68}$$

厳密に連続な系では k の積分範囲に上限がなく，ゼロ点エネルギーは発散するが，これは必ずしも問題にはならない．何故なら，ゼロ点エネルギーは ω_k もしくは系の状態密度を変えるような実験において，その変化分だけを評価し得るものだ

からである．たとえば寸法が可変になっている空洞共振器内の場において，このような変更が可能である．そこでは E_0 の“変化量”だけが測定可能であるが，これはCasimirエネルギーと呼ばれる．基底エネルギーの変更だけが重要となる別の例として，系を構成するある部分が，その他の部分のパラメーターを修正するような場合もある．そのような結合が系のエネルギーを低下させ“自発的な対称性の破れ”を引き起こす例はいろいろある．

ゼロ点エネルギーの総和が発散することは，量子場と重力の結合を考える際に重要となる．エネルギー密度はすべて重力場の源となり，発散している真空エネルギー密度は非常に大きな宇宙定数を生じ得る．実際の観測からすると宇宙定数は(存在するとしても)小さいものであるが，このことに基づいて多くの理論的考察がなされている．

もちろん本章で行ったことは，すべて3次元系へ拡張できる．スカラー場 φ を考えてみよう．作用，

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{1.69}$$

の計算に用いる“ラグランジアン密度”は，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{c^2}{2} (\partial_i \varphi)^2 - \frac{m^2 c^4}{2} \varphi^2 \tag{1.70}$$

と表される．場のモード展開は，

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right\} \tag{1.71}$$

と書かれる．ここに現れる消滅・生成演算子の交換関係は，

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{1.72}$$

であり，場の演算子の同時刻交換関係は，

$$\left[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \partial_t \hat{\varphi}(\mathbf{x}', t)\right] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{1.73}$$

となる．

第 2 章　相対論的スカラー場

相対論的な系において場の理論の検討を始めるのが最も容易である．Lorentz不変性 (Lorentz invariance) は議論を単純化する指針となり，簡便な表記法を与える．

2.1　単位系と計量

以下の数章で，場の理論の素粒子物理への応用を扱う．場の量子論では $\hbar$ と光速 c を 1 とおく“自然単位系”(natural units) を用いるのが慣例となっている．光速を 1 とおくことは，時間と距離が共通の単位，たとえばfermi[1)]で測れることを意味する．$1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$ である．このfermi (femtometerでもあるので，fmという略号は都合がよい) はおおよそ核子 (陽子・中性子) の大きさに相当し，光が核子を横切るのに要する時間は $1\ \mathrm{fm} \approx 3^{-1} \times 10^{-23}\ \mathrm{s}$ 程度である．これが強い相互作用の働く典型的な時間のスケールである．また質量 m をそれに相当するエネルギー mc^2 と同一視することができるので，質量とエネルギーを共にGeVの単位で測ることができる．

更に $\hbar = 1$ とおいたことから，質量を，それに相当するCompton波長 $\hbar/mc$ と対応させて fm^{-1} の単位で表すこともできる．おおよそ $1\ \mathrm{GeV} \approx 0.20\ \mathrm{fm}^{-1}$ である．何らかの量 x の次元 $[x]$ を表す場合，$[M] = [L]^{-1}$ の関係があるので，質量の単位 M で表すことも，長さの単位 L で表すことも可能である．たとえばラグランジアン密度は M^4 の次元を持ち，“作用”は無次元である．

Minkowski空間の計量に関する慣例も確認しておく．$g_{00} = 1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ の計量テンソルを採用するので，質量 m，4 元運動量 $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ を持つ粒子において，4 元運動量のそれ自身との内積は $p^2 = p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = E_{\mathbf{p}}^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ である．計量テンソルはLorentzテンソルの添字を上げたり下げたりする作用を持つ．たとえば $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E_{\mathbf{p}}, -\mathbf{p})$ である．

---

1)Enrico Fermiに因む．Fermiは 1901 年 9 月 29 日 Rome生まれ．1954 年 11 月 28 日 Chicagoにて死去．1938年ノーベル物理学賞．

2.2 Klein-Gordon方程式

前章で導入したピン止め項は，もちろん $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ の関係を念頭に置いたものである．分散関係 $\omega_{\mathbf{p}}^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$ は，質量 m を持つ相対論的粒子のエネルギーと運動量の関係を表している．これ以降，相対論的な粒子の議論において $\omega_{\mathbf{k}}$ の代わりに $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ を用いることにする．

このエネルギーと運動量の関係を与える波動方程式，

$$\left(\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2 + m^2\right)\varphi = 0 \tag{2.1}$$

は，KleinとGordonの論文で最初に言及されたものなので，彼らの名が冠せられている．しかしこのKlein-Gordon(KG)方程式は，実はSchrödingerが彼の方程式を発見する以前に，すでに調べて放棄していたものであった．Schrödingerは原子内でKepler軌道を巡る電子に対応するde Broglie[2)]波の振舞いを研究していた．この問題を扱うために，新しい波動方程式が必要であることを指摘したのはDebye[3)]であった．de Broglie波は相対論的な波なので，Schrödingerはまず最初に，相対論的なKG方程式を見いだして論文を書いたのだが，水素原子スペクトルの正しい微細構造を導けていなかったために，この論文を取り下げてしまった．結局彼が発表したのは，現在彼の名が冠せられている非相対論的な方程式だけになったのである．

KG方程式から正しい微細構造を導けなかった理由は，KG方程式ではスピンが考慮されていない点にある．粒子のスピンは，場の量に伴うLorentz添字によって決まる．Klein-Gordon場 $\varphi(x)$ はLorentzスカラーであり，スピンがゼロの粒子を記述する．スピン $\dfrac{1}{2}$ の電子を記述するためには“スピノル場”(spinor field) ψ_α が必要であるが，これについては第7章で議論する．本章ではスピンなどに付随する添字の繁雑さを避けるために，まず最も単純な“スカラー場” φ を取り上げて，相対論的な場に現れる諸概念を見てみることにする．

2.2.1 相対論的規格化

第1章の式を，そのままLorentz不変な系に適用しようとすると，モード展開の式(1.62)に現れる係数 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ が不都合になる．これはLorentzスカラー場 $\hat{\varphi}$ の，

2)Louis-Victor(-Pierre-Raymond) de Broglie (7th duc de Broglie)：1892年8月15日 Dieppe (フランス) 生まれ．1987年3月19日 Parisにて死去．1929年ノーベル物理学賞．

3)Peter (Joseph William) Debye (Petrus Josephus Wilhelmus Debije)：1884年3月24日 Maastricht (オランダ) 生まれ．1966年11月2日 Ithaca (ニューヨーク州) にて死去．1936年ノーベル化学賞．

真空 $|0\rangle$ と 1 粒子状態 $|\mathbf{k}\rangle$ の間の行列要素，

$$\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_{\mathbf{k}}t} \tag{2.2}$$

のような量がLorentzスカラーにならないことを意味する．しかしこの欠陥は簡単な式の書き替えによって回避できる．

モード展開を次のように書き直す．

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\left\{\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-iE_{\mathbf{k}}t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_{\mathbf{k}}t}\right\} \tag{2.3}$$

ここでは係数因子を更に $\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ で割り，$\hat{a}$ と $\hat{a}^{\dagger}$ を再定義している．このため交換関係は，

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.4}$$

となっている．これは状態 $|\mathbf{k}\rangle \equiv \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}|0\rangle$ が，

$$\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.5}$$

のように規格化されることを意味する．

この新しい定義の下では，

$$\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}|0\rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+iE_{\mathbf{k}}t} \tag{2.6}$$

であり，今度は右辺がLorentzスカラーになる．このようにすると，演算子の行列要素はLorentz変換の下で演算子自身と同じように変換する．

この望ましい変換性を得るために，モード展開に因子 $1/2E_{\mathbf{k}}$ が導入されて内積が複雑になるという，一見好ましからざる事態が生じたように見える．しかし実際には，これで $2E_{\mathbf{k}}$ の因子が自然な位置を占めることになる．たとえば恒等式，

$$\delta(k^2-m^2) = \frac{1}{2k^0}\delta(k^0-E_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{2k^0}\delta(k^0+E_{\mathbf{k}}) \tag{2.7}$$

を用いると，

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}f(\mathbf{k},E_{\mathbf{k}}) \tag{2.8}$$

は次のように書ける．

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\pi\delta(k^2-m^2)\,\theta(k_0)f(\mathbf{k},k_0) \tag{2.9}$$

($k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ はLorentzの内積である) これはLorentz不変な測度，Lorentz不変なデルタ関数，および順時Lorentz変換 (時間反転のないLorentz変換) の下で不変なHeavisideのステップ関数を含んだ形になっている．

内積 $\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ も，理に適ったものである．状態 $|\mathbf{k}\rangle$ は連続体の規格化を伴っており，通常の量子力学で波動関数が e^{ikx} と表される連続規格化された状態 $|k\rangle$ と同様に，共通の運動量 $\mathbf{k}$ を持つ粒子の“ビーム”を表す．新しい $|\mathbf{k}\rangle$ の規格化は“ビーム”中の粒子密度が，粒子のエネルギーの2倍であることを意味している．ある座標系でこの規格化を行い，その座標系から，粒子の速度がより速くて運動エネルギーが高く見えるような，別の座標系へ移行するLorentz変換を想定してみよう．$2E$ による規格化は，新しい座標系において粒子密度が高くなることを意味しているが，これは妥当である．はじめの座標系における単位立方体は，新しい座標系ではLorentz収縮によって小さくなるが，その体積の中の粒子数は変換の前後で変わらないので，粒子の密度は変換の前後で，エネルギーと同様に大きくなる．このことの形式的な記述を付録Aに与えておく．

式(2.5)の規格化は“Lorentz不変な規格化”と呼ばれる．また，

$$I = \int \prod_i \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) f\big(\mathbf{k}_i, E(\mathbf{k}_i)\big) \tag{2.10}$$

のような積分を“Lorentz不変な相空間”(Lorentz-Invariant Phase Space：LIPS)における積分と称する．

$x_0 = t$ とし，Lorentz内積 $kx = k_0x_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ を用いると，場の演算子のモード展開と行列要素を，次のように書くことができる．

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{+ikx} \right\} \tag{2.11}$$

$$\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}|0\rangle = e^{ikx} \tag{2.12}$$

量子力学の計算では“完全性を持つ状態一式”(complete set of states)を式中に挿入することが多い．これは単位演算子の挿入，もしくはHilbert空間内の“単位量の分解”(resolution of unity)と等価な操作である．我々の扱うHilbert空間の中で $|n\rangle$ が完全正規直交系を成しているものとすると，次式が成り立つ．

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n| \tag{2.13}$$

場の理論のHilbert空間は，それぞれ異なったタイプの粒子を含む部分空間に分解される(自由場の理論では，ハミルトニアンの行列要素によって，これらの異なる部分空間が関係を持つことはないが，相互作用に伴い各粒子の生成消滅が起こる場合には，部分空間の間に関係が生じる)．各々の部分空間の中で単位量の分解が

可能である．我々が採用する規格化を用いると，分解の式は次のようになる．

$$1_N = \frac{1}{N!}\int \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)|\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_N\rangle\langle\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_N| \tag{2.14}$$

N 粒子状態は，次のように定義される．

$$|\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_N\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1}\ldots\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N}|0\rangle \tag{2.15}$$

N 粒子状態間の内積は次のようになる．

$$\langle\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N|\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_N\rangle = \langle\mathbf{p}_1|\mathbf{k}_1\rangle\langle\mathbf{p}_2|\mathbf{k}_2\rangle\ldots\langle\mathbf{p}_N|\mathbf{k}_N\rangle \\ +\text{permutations} \tag{2.16}$$

$\mathbf{p}$ は個別に $\mathbf{k}$ と対応しているわけではなく，“一式”全体として $\mathbf{k}$ に対応しているだけなので，置換項 (permutations) の加算が必要となる．正確を期するならば，運動量の順序の選び方が違うものをそのまま加算するだけでなく，右辺全体を適正な値に戻すために，式(2.14)のような $N!$ による除算が必要である．

注意：厳密に言うと，状態密度の中の各々の因子 d^3k は，系の体積 V の因子を伴うべきものである．これは我々がビームでなく単一粒子の規格化をする場合に各状態に含まれるべき因子 $1/\sqrt{V}$ と相殺する．読者は式を見るときに，このことを念頭に置いておかなければならない．

2.2.2 内積

計量の慣例に従い KG 方程式を次のように書くことができる．

$$(-p^2+m^2)\varphi \equiv (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi \equiv (\partial^2+m^2)\varphi = 0 \tag{2.17}$$

平面波解 $\varphi_{\mathbf{p}} = e^{-ipx} = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-iE_{\mathbf{p}}t}$ を考えると $E_{\mathbf{p}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ である．正の根 $E_{\mathbf{p}} > 0$ を選ぶ場合，解が“正の振動数”を持つと言う (正の振動数は消滅演算子に対応する)．

φ が KG 方程式を満たすなら，

$$\partial^\mu\big(\varphi^*\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\varphi^*)\varphi\big) = 0 \tag{2.18}$$

となる．電流密度を，

$$J_\mu = i\big(\varphi^*\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\varphi^*)\varphi\big) \tag{2.19}$$

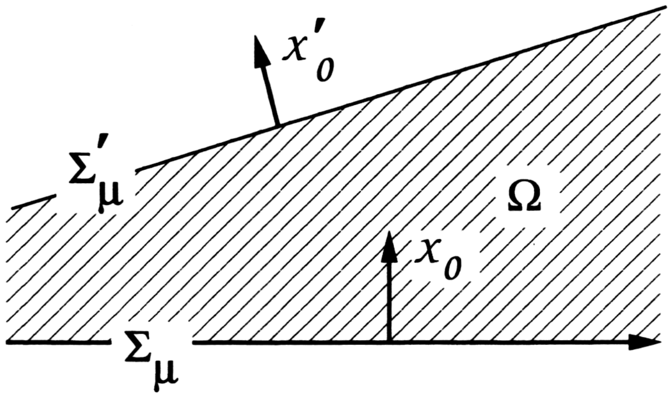


図 2.1　$\int_\Sigma J_\mu d\Sigma^\mu$ と $\int_{\Sigma'} J_\mu d\Sigma^\mu$ の差は $\int_\Omega \partial^\mu J_\mu d\Omega = 0$ である．

と定義すると，$\partial_\mu J^\mu = 0$ である．

$J^\mu = (J^0, \mathbf{J})$ とおくと，

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_t J^0 + \nabla\cdot \mathbf{J} = 0 \tag{2.20}$$

と書くことができ，J^0 が粒子の " 電荷 " (charge) であって，その総量は保存することが分かる．言い替えると，

$$Q = \int_{t=\mathrm{const.}} J^0 d^3x \tag{2.21}$$

は時間に依存しない Lorentz 不変な定数である．したがって時空内における任意の空間的 (spacelike) な超平面に関して，

$$Q = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu \tag{2.22}$$

となる．

この電荷に着目すると，KG 方程式の解の関数空間における自然な内積の形が，次のように決まる．

$$(\varphi_\mathbf{p}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = i\int_{x_0=\mathrm{const.}} \left(\varphi^*_\mathbf{p}\partial_0\varphi_{\mathbf{p}'} - (\partial_0\varphi^*_\mathbf{p})\varphi_{\mathbf{p}'}\right) d^3x \tag{2.23}$$

正のエネルギーを持つ 2 つの解の内積は次のようになる．

$$(\varphi_\mathbf{p}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{2.24}$$

正の振動数を持つ解と，負の振動数を持つ解の内積はゼロになる．

一般の複素内積と同様に，(a,b) は共役対称 $(a,b)=(b,a)^*$ であり，次のように半双線形 (sesquilinear) でもある．

$$
\begin{aligned}
(a,\lambda b) &= \lambda(a,b) \\
(\lambda a,b) &= \lambda^*(a,b)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

しかしこの内積は正定値にはならない．負の振動数を持つ解の，それ自身との内積は負になる．正定値でない性質から，Q が何であれ，これを確率密度や粒子数と解釈することはできない．KG方程式を単純にSchrödinger方程式を相対論的にしたものと考えて，この内積を利用することはできないのである．

2.2.3 複素スカラー場

φ が実場であれば，それ自身との内積は恒等的にゼロになる．実場を量子化するとHermite演算子になり，光子や π^0 のように反粒子がその粒子自身であるような粒子を表す．Hermite場でない複素場は，反粒子がその粒子自身ではない $\pi^\pm$ のような粒子を表すために必要となる．

$\varphi_{1,2}$ を実場として，複素場 $\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2)$ を考えよう．作用 S は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{2}\int d^4x\Big(\frac{1}{2}\varphi_i(\partial^2+m^2)\varphi_i\Big) \\
&= \int d^4x\big(\varphi^*(\partial^2+m^2)\varphi\big)
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

同時刻交換子は，

$$
\delta(x_0-x'_0)\big[\hat{\varphi}_i(x),\partial_0\hat{\varphi}_j(x')\big]=i\delta_{ij}\delta^4(x-x') \tag{2.27}
$$

により，次のようになる．

$$
\delta(x_0-x'_0)\big[\hat{\varphi}(x),\partial_0\hat{\varphi}^\dagger(x')\big]=i\delta^4(x-x') \tag{2.28}
$$

基準振動展開は，次のように表される．

$$
\hat{\varphi}(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\Big\{\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{-ikx}+\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{+ikx}\Big\} \tag{2.29}
$$

$\hat{\varphi}$ がHermite場ではないため，第 2 項の係数は第 1 項の係数に対して独立である．

内積を使って，$\hat{\varphi}$ から係数 $\hat{a}$，$\hat{b}$ を取り出すことができる．

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}} &= (e^{-ikx}, \hat{\varphi}), \quad \hat{b}_{\mathbf{k}} = (e^{-ikx}, \hat{\varphi}^\dagger)\\ \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} &= (\hat{\varphi}, e^{-ikx}), \quad \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} = (\hat{\varphi}^\dagger, e^{-ikx})\end{aligned} \tag{2.30}$$

式(2.28)から直ちに，次の交換関係が導かれる．

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = (e^{ikx}, e^{ik'x}) = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.31}$$

同様に，

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = 2E_{\mathbf{k}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.32}$$

である．また，$\hat{a}$ または $\hat{a}^\dagger$ と，$\hat{b}$ または $\hat{b}^\dagger$ の組み合わせは，交換可能である．

2.3 対称性とNoetherの定理

2.3.1 内部対称性

古典力学においても量子力学においても，系の対称性は保存則に結び付いている．保存量は対称操作を“生成する”．おそらく最も読者に馴染みのある例は，角運動量であろう．回転対称性から角運動量の保存則が導かれる．角運動量ベクトルの3成分 $\hat{J}_i$ を用いてユニタリー演算子 $U=\exp(-i\theta\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}})$ を作ることができるが，これは軸 $\mathbf{n}$ のまわりの角度 θ の回転を表す．

物理的な空間における回転以外に“内部空間”(internal space) における回転を考えることもできる．アイソスピン (isospin) はこの例である．3種類のパイオン (pion) $\pi^\pm$，π^0 はアイソスピンの回転によって互いに変換し，アイソスピン代数 SU(2) の $I=1$ 表現を形成する．この代数は角運動量 $\hat{J}_i$ に関するLie代数と数学的に同型であるが，物理的な意味は全く異なっている．このLie群 SU(2) は強い相互作用に関する (ほぼ完全な) 対称性を表している．

複素スカラー場 φ に関する作用 (2.26) の被積分関数であるラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，内部空間内の変換の下で変わらない．すなわち，

$$\varphi(x) \;\to\; e^{-i\alpha}\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \;\to\; e^{i\alpha}\varphi^*(x) \tag{2.33}$$

もしくは，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\;\to\; \cos\alpha\,\varphi_1 + \sin\alpha\,\varphi_2\\ \varphi_2 &\;\to\; -\sin\alpha\,\varphi_1 + \cos\alpha\,\varphi_2\end{aligned} \tag{2.34}$$

のように変換される．式中の位相変換角度 α は座標に依存しない定数である．

現代抽象代数の創始者のひとりである Emmy Noether[4)] は，1915年に数理物理学に足を踏み入れ，ラグランジアン形式によって対称性から保存則を導き出す簡単な方法が与えられることを指摘した．ここで α を座標に依存するパラメーター $\alpha(x)$ に置き換え，$\varphi(x) \to e^{-i\alpha(x)}\varphi(x)$ として $\alpha(x)$ を最小作用の原理における微小な変分と考える．これを式(2.26)に代入すると次式が得られる．

$$\delta S = \int i\big(\varphi^* \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi^*)\varphi\big)\partial^\mu \alpha(x) d^4x \tag{2.35}$$

対称性によって α が微分されない項は残らない．$\alpha(x)$ が無限遠において消失するものとすると，部分積分によって次式が導かれる．

$$\delta S = \int -\alpha(x)\partial^\mu \big(\varphi^* \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi^*)\varphi\big) d^4x \tag{2.36}$$

“任意の位相変分”の下で $\delta S = 0$ であるという条件から，運動方程式が決まる．$\alpha(x)$ の任意の微小変化に対して δS が常にゼロにならなければならないので，次式が成立する．

$$0 = \partial^\mu \big(\varphi^* \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi^*)\varphi\big) \tag{2.37}$$

我々はすでに，式(2.18)でこの関係を知っているが，これでカレントの保存則 (電荷・電流保存則) が偶然の産物でないことを理解できる．

変換を生成する演算子は，全電荷の演算子である．

$$\hat{Q} = \int_{t=\mathrm{const.}} \hat{J}_0 d^3x = i\int_{t=\mathrm{const.}} d^3x \big(\hat{\varphi}^\dagger \partial_0 \hat{\varphi} - (\partial_0 \hat{\varphi}^\dagger)\hat{\varphi}\big) \tag{2.38}$$

交換関係，

$$\big[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \partial_0 \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\big] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{2.39}$$

から，次の関係が見いだされる．

$$\big[\hat{Q}, \hat{\varphi}(x)\big] = -\hat{\varphi}(x), \quad \big[\hat{Q}, \hat{\varphi}^\dagger(x)\big] = \hat{\varphi}^\dagger(x) \tag{2.40}$$

Campbell-Baker-Hausdorffの公式による指数関数の変換は，

$$e^{i\alpha\hat{Q}}\hat{\varphi}(x)e^{-i\alpha\hat{Q}} = e^{-i\alpha}\hat{\varphi}(x) \tag{2.41}$$

であり，全電荷は $\hat{a}$ と $\hat{b}$ を用いて次のように表せる．

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}\big(\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}\hat{a}_\mathbf{k} - \hat{b}^\dagger_\mathbf{k}\hat{b}_\mathbf{k}\big) \tag{2.42}$$

[4)] Amalie (Emmy) Noether：1882 年 3 月 23 日 Erlangen (ドイツ) 生まれ．1935 年 4 月 14 日 Bryn Mawr (ペンシルベニア州) にて死去．

したがって $\hat{Q}$ の固有値は，$\hat{a}$ の量子数と $\hat{b}$ の量子数の差によって与えられる．式(2.38)から忠実に $\hat{b}$ と $\hat{b}^\dagger$ の前後関係を保った計算を経て得られる被積分関数の因子は，本当は $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}$ である．しかしこの形の演算子の下では $\propto \delta^3(0)$ の交換子項によって，基底状態 $|0\rangle$ が無数の $\hat{b}$ の量子を含んでしまう．上式では $\hat{b}$ を $\hat{a}$ と同様に扱えるようにするために，交換子項を省いたのである．次章で見るように，式(2.38)の $\hat{Q}$ は $N(\hat{Q})$ と表記し直さなければならない．

式(2.40)により $\hat{Q}|\text{state}\rangle = N|\text{state}\rangle$ とすると，$\hat{Q}\hat{\varphi}|\text{state}\rangle = (N-1)\hat{\varphi}|\text{state}\rangle$ である．$\hat{\varphi}(x)$ は時空点 x において Q の負電荷を生成させるか，もしくは Q の正電荷を消滅させる．同様に $\hat{\varphi}^\dagger(x)$ は x において Q の正電荷を生成させるか，もしくは Q の負電荷を消滅させる．

このことを，ダイヤグラムで次のように表す．



図 2.2 電荷の生成と消滅．矢印は電荷の向きを表す．

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が，複数の場の量 φ_i と，それらの一次微分 $\partial_\mu\varphi_i$ に依存し，それが次に示すような無限小変換の下で不変であれば，より一般的な Noether の定理が適用できる．

$$\varphi_\alpha \ \rightarrow \ \varphi_\alpha + i\epsilon_i\lambda^i_{\alpha\beta}\varphi_\beta \tag{2.43}$$

ϵ_i は微小なパラメーター一式である．Hermite行列 λ^i は，次のような交換関係に基づく Lie代数を形成する．

$$[\lambda^i, \lambda^j] = if^{ij}{}_k\lambda^k \tag{2.44}$$

ここでもパラメーター ϵ_i は座標 x に依存しない場合に限り，$\mathcal{L}$ が不変であると仮定する．このように座標全体にわたって一様に施される変換を大域的変換 (global transformation) と呼び，局所的変換 (local transformation) と区別する．大域的変換に関する対称性を大域的対称性 (global symmetry) と称する．

δS は，次式のようになる．

$$\delta S = \int d^4x \left[\epsilon_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \lambda^i_{\alpha\beta} \varphi_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda^i_{\alpha\beta} \partial_\mu \varphi_\beta \right\} + \partial_\mu \epsilon_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda^i_{\alpha\beta} \varphi_\beta \right\} \right] \tag{2.45}$$

変換性の仮定により，上式の中で ϵ_i に比例する一連の項はゼロになる．部分積分を施し，作用の停留性を課すると，場の運動方程式が与えられる．

$$0 = \partial_\mu J^{(i)\mu} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda^i_{\alpha\beta} \varphi_\beta \right\} \tag{2.46}$$

この式に基づいて，カレント†(current) を次のように定義できる．

$$J^{(i)\mu} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \lambda^i_{\alpha\beta} \varphi_\beta \tag{2.47}$$

“荷”密度 (charge densities) $J^{(i)0}$ は次のように書ける．

$$J^{(i)0} = -i\pi_\alpha(x) \lambda^i_{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) \tag{2.48}$$

元の交換関係 $\left[\hat{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_\beta(\mathbf{x}', t)\right] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\alpha\beta}$ から次の関係が導かれる．

$$\begin{aligned} \left[\hat{J}^{(i)0}(\mathbf{x}), \hat{J}^{(j)0}(\mathbf{x}')\right] &= -i\hat{\pi}_\alpha(x)[\lambda^i, \lambda^j]_{\alpha\beta} \hat{\varphi}_\beta(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= i f^{ij}{}_k \hat{J}^{(k)0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \tag{2.49}$$

この式は“カレント代数”(current algebra) の一例である．“荷”密度を全空間にわたって積分すると“全荷量”$\hat{Q}^{(i)}$ が得られる．これらの交換子が Lie 代数を形成することは明らかである．

2.3.2 時空の対称性

Noetherの定理を，エネルギー－運動量テンソルの導出に用いることもできる．並進対称性を持つ系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，次の変換の下で不変でなければならない．

$$\varphi(x^\mu) \;\rightarrow\; \varphi(x^\mu + \alpha^\mu) \approx \varphi(x^\mu) + \alpha^\mu \partial_\mu \varphi(x^\mu) \tag{2.50}$$

先の内部対称性の議論と同様に，ここで α_μ が座標に依存しないものとすると，以下のようになる．

$$0 = \delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} (\alpha^\mu \partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial_\nu (\alpha^\mu \partial_\mu \varphi) \right\} \tag{2.51}$$

†(訳註) カレントは，電流密度 (もしくは粒子流密度) を一般化した概念である．

$$= \int d^4x \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial^2_{\mu\nu} \varphi \right\} \alpha^\mu + \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi \right\} \partial_\nu \alpha^\mu \right] \quad (2.52)$$

$$= \int d^4x \, \alpha^\mu \left[\partial_\mu \mathcal{L} - \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial_\mu \varphi \right\} \right] \quad (2.53)$$

“正準エネルギー－運動量テンソル”(canonical energy-momentum tensor) を次式のように定義する．

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (2.54)$$

このテンソルは $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ を満たす．$T^0{}_0 = T^{00}$ はエネルギー密度である．他の成分は次のように解釈できる．

- $T^i{}_0$，$i = 1, 2, 3$ は“エネルギーの流れ”(energy flux) を表す．
- $T^{0i} = -T^0{}_i$，$i = 1, 2, 3$ は“運動量密度”(momentum density) を表す．

実スカラー場に関して，共変テンソル $T_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} T^\sigma{}_\nu$ が対称であることは明らかである．

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.55)$$

$T_{\mu\nu}$ が (したがって $T^{\mu\nu}$ も) 対称であれば，次のテンソル，

$$M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu} \quad (2.56)$$

が $\partial_\mu M^{\alpha\mu\nu} = 0$ を満たす．“電荷”$L^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu}$ は，角運動量を4次元へ一般化したもので，Lorentz変換を生成する．しかしながら式(2.54)において μ と ν の扱いが非対称であるため，多くの場の理論において，正準エネルギー－運動量テンソルは“対称ではない”が，これは驚くにはあたらない．

この対称性の欠如は，Lorentz不変性に関しては問題にならない．エネルギー－運動量テンソルは，常に $\partial_\alpha B^{\alpha\mu\nu}$ のような項を付加できるので，一意的ではない．B は初めの2つの添字に関して反対称なテンソルで，$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ の関係を破らない．通常，Lorentz変換の生成子に対するこのような付加項は，粒子自身が持つ角運動量に関係しており，場に付随するテンソル添字やスピノル添字の変換性の議論に役立つ．

保存量となる対称なエネルギー－運動量テンソルをつくる強力な方法としては，背景となる任意の計量 $g_{\mu\nu}$ に対して，次のような定義を用いればよい．

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.57)$$

$\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$ は体積要素である．

実スカラー場の場合，S を次のようにおく．

$$S = \int d^4x \sqrt{g}\, \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2\right) \tag{2.58}$$

式(2.57)を評価する上で，唯一の難しい部分は，$\sqrt{g}$ の変分を決めるところである．これは恒等式 $\ln\det g = \operatorname{tr}\ln g$ によって，次のように与えられる．

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.59}$$

この関係を用いると，式(2.58)の変分によって，式(2.55)を再現できる．

ここでNoetherの定理により，任意の時空において $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ となることの証明を，共変微分に馴染みのある読者への演習問題としておく．

次の量は，運動量密度を表す．

$$P^i = \int d^3x\, T^{0i} = -P_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.60}$$

複素スカラー場の運動量密度と，その $\hat{\varphi}$ との交換子は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \hat{P}^i &= \int d^3x \left(\partial^0\hat{\varphi}^\dagger\partial^i\hat{\varphi} + \partial^0\hat{\varphi}\partial^i\hat{\varphi}^\dagger\right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} k^i\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{b}_{\mathbf{k}}\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} [\hat{P}^i, \hat{\varphi}] &= \left[\int d^3x \left(\partial^0\hat{\varphi}^\dagger\partial^i\hat{\varphi} + \partial^0\hat{\varphi}\partial^i\hat{\varphi}^\dagger\right), \hat{\varphi}\right] \\ &= -i\partial^i\hat{\varphi} = +i\partial_i\hat{\varphi} \end{aligned} \tag{2.62}$$

ここでユニタリー演算子 $U(\mathbf{a})$ を，次のように定義する．

$$U(\mathbf{a}) = e^{-ia^i\hat{P}^i} = e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}} \tag{2.63}$$

この演算子は，次の性質を持つ．

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a})\hat{\varphi}(\mathbf{x})U^\dagger(\mathbf{a}) &= \hat{\varphi}(\mathbf{x}) - ia^i\left[\hat{P}^i, \varphi(\mathbf{x})\right] + \ldots \\ &= \hat{\varphi}(\mathbf{x}) - ia^i\left(i\partial_i\hat{\varphi}(\mathbf{x})\right) + \ldots \\ &= \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + a^i\partial_i\hat{\varphi}(\mathbf{x}) + \ldots \\ &= \hat{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \end{aligned} \tag{2.64}$$

[Campbell-Baker-Hausdorffの公式を用いて，$+\ldots$ と表した部分が，$\hat{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ のTaylor級数の残りの部分になることを確認せよ.]

この観点から行列要素の式を見直してみよう．

$$\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}(\mathbf{x})|0\rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{2.65}$$

これを次のように書き直してみる．

$$\langle \mathbf{k}|\hat{\varphi}(\mathbf{x})|0\rangle = \langle \mathbf{k}|e^{-i\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{P}}}\hat{\varphi}(0)e^{+i\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{P}}}|0\rangle = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{2.66}$$

右側の等式は $\langle \mathbf{k}|e^{-i\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{P}}} = \langle \mathbf{k}|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ および $\hat{\mathbf{P}}|0\rangle = 0$ の関係に依る．$\hat{\mathbf{P}}$ を用いた並進操作は，我々が既に知っている行列要素の式と整合した結果を与えている．

上記の形式について，最後に実際の物理に関係した指摘をしておかなければならない．“エーテル”(媒質) の存在しない相対論的な場において，$\mathbf{P}$ は運動量と呼ばれる．これは古典電磁気学で馴染みのある，

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c^2}\int d^3x\, \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{2.67}$$

に類似した量である．しかし我々の扱う場が，第 1 章で示したような媒質中 (結晶や流体) のフォノンを表す際には，注意が必要である．この場合には 2 通りの異なる“並進”対称性があり，これに対応して 2 通りの“運動量”の概念が生じる．第 1 の概念は，ここで議論したような，背景となる一様な媒質に対して波を移動させる並進操作に伴う対称性である．第 2 の概念は，媒質と波を一緒に移動させる並進操作に関する対称性である．後者だけがNewton力学的な“運動量”の意味を持つ．前者の対称性は，流体力学で“擬運動量”(pseudomomentum) と呼ばれるものに対応する．結晶中のフォノンは擬運動量だけを持つが，流体中のフォノンは両方の運動量を担う．流体中の運動量密度 $\rho\mathbf{v}$ は，質量の流れの密度と一致するので，流体中にはフォノンの“風”が存在する．このことは，また後から議論する．

第 3 章　摂動論

3.1　相互作用

場と，c-数 (c-number) で表される外部の源との相互作用は，場に対して導入し得る最も単純な相互作用である．実スカラー場のラグランジアン密度に $J(x)\varphi(x)$ という項を付け加えると，運動方程式は次のようになる．

$$(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = J(x) \tag{3.1}$$

第 1 章の結晶モデルに即して考えると，J は原子にはたらく外力である．素粒子論的な解釈をすると，J は“ $\hat{\varphi}(x)$ 量子 ”の源である．これらの概念は互いに整合している．すなわち結晶に力を及ぼすと，結晶弾性場の量子であるフォノンが生じる．

粒子同士の相互作用を扱う場合には，非線形な場の方程式が必要となり，ラグランジアンに 2 次より高次の項が現れる．スカラー場に対して想定できる最も単純な相互作用は，場の量の多項式で表される．たとえば実場の φ^4 モデルは，次の相互作用項を持つ．

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{3.2}$$

これを変形して，N 個の実場から成る系に対して，

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_i \varphi_i^2\right)^2 \tag{3.3}$$

という相互作用項を与えることができる．この項は直交群 $\mathrm{O}(N)$ の対称性を持ち，その群を形成する種々の“ 電荷 ”に関係した保存量が存在する．

素粒子物理における相互作用の形は，対称性とそれに伴う保存則によって強い制約を受ける．大抵の場合，まずは必要な対称性を備えた，最も一般的な相互作用項を書き下すことになる．通常は相互作用項の中で，微分の数が最も少ないものが重要である．微分が多い項は，相互作用を“ 繰り込み不可能 ” (nonrenormalizable) にする．現代的な術語で言えば，このような項は“ 無効 ” (irrelevant) である．繰り込み不可能な項は，あらゆる高エネルギー切断に比べて十分低いエネルギー領域の

物理には影響を及ぼさない†. 本章では，最も単純な相互作用項だけを扱うことにする.

3.2 摂動論

3.2.1 相互作用描像

場の理論の一般論においてはHeisenberg描像が有用であるが，摂動論に都合がよいのは"相互作用描像"(interaction picture)である．この描像は，摂動を議論するためにDyson[1)]によって最初に用いられた．相互作用描像では，場の自由な時間発展に関してHeisenberg描像を適用するが，異なるHeisenberg状態への遷移を，相互作用に起因するものとして許容する.

Schrödinger描像における状態ベクトルの時間発展は，次式で与えられる.

$$i\partial_t\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{S}} = \hat{H}(t)\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3.4}$$

$\hat{H}$ が時間に依存しなければ,

$$\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{S}} = \exp(-i\hat{H}t)\big|\psi(0)\big\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3.5}$$

である．$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ ($\hat{V}$ は相互作用を表す摂動項) とおくと，相互作用描像の状態ベクトルを，次のように定義できる.

$$\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} = e^{i\hat{H}_0 t}\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3.6}$$

すなわち相互作用描像の状態ベクトルは，Schrödinger描像の状態ベクトルから自由場の時間発展を取り除き，相互作用の効果だけを残したものである．相互作用描像における状態ベクトルの時間発展は，次式で与えられる.

$$\begin{aligned} i\partial_t\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} &= -\hat{H}_0\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} + e^{i\hat{H}_0 t}\big(i\partial_t\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{S}}\big) \\ &= -\hat{H}_0\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} + e^{i\hat{H}_0 t}(\hat{H}_0 + \hat{V})e^{-i\hat{H}_0 t}\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} \\ &= \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\big|\psi(t)\big\rangle_{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

但しここで,

$$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{V}(t)e^{-i\hat{H}_0 t} \tag{3.8}$$

---

†(訳註) p.237訳註参照.

1)Freeman John Dyson：1923 年 12 月 15 日 Crowthorne, Berkshire (イギリス) 生まれ.

である．$\hat{V}$ が時間に依存しないものとすると，$\hat{V}_{\mathrm{I}}$ の時間依存性は，自由な Heisenberg 演算子の時間依存性と同じ形になることに注意されたい．

量子力学の時間に依存する摂動論によると，方程式，

$$i\partial_t\big|\psi(t)\big\rangle = \hat{H}(t)\big|\psi(t)\big\rangle \tag{3.9}$$

の解は，

$$\big|\psi(t)\big\rangle = T\exp\left\{-i\int_0^t \hat{H}(t')dt'\right\}\big|\psi(0)\big\rangle \tag{3.10}$$

と与えられる．時間順序化を施した指数関数は，次のように定義される．

$$\begin{aligned} &T\exp\left\{-i\int_0^t \hat{H}(t')dt'\right\} \\ &= 1 - i\int_0^t \hat{H}(t')dt' - \frac{1}{2!}\int_0^t\int_0^t T\big\{\hat{H}(t')\hat{H}(t'')\big\}dt'dt'' + \ldots \end{aligned} \tag{3.11}$$

時間順序化 T が 2 つの演算子の積に作用する場合，$t' > t''$ ならば $T\big\{\hat{H}(t')\hat{H}(t'')\big\} = \hat{H}(t')\hat{H}(t'')$，$t'' > t'$ ならば $T\big\{\hat{H}(t')\hat{H}(t'')\big\} = \hat{H}(t'')\hat{H}(t')$ となる．3 つ以上の演算子積に関しても同様である．

次の 2 つの式の違いに注意されたい．

$$e^{\int_a^b A(t)dt} \approx e^{A(t_n=t_b)\delta t + A(t_{n-1})\delta t + \ldots + A(t_2)\delta t + A(t_1=t_a)\delta t} \tag{3.12}$$

$$Te^{\int_a^b A(t)dt} \approx e^{A(t_n=t_b)\delta t}e^{A(t_{n-1})\delta t}\ldots e^{A(t_2)\delta t}e^{A(t_1=t_a)\delta t} \tag{3.13}$$

ここで $t_n > t_{n-1} > \ldots$ である．異なる時刻に属する A が交換可能な場合にのみ，両者は等しい．

またユニタリーな時間発展演算子 U を，

$$\big|\psi(t_2)\big\rangle = U(t_2,t_1)\big|\psi(t_1)\big\rangle \tag{3.14}$$

のように導入すると，これは次のように表すことができる．

$$U(t_2,t_1) = T\exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}(t)dt\right\} \tag{3.15}$$

3.2.2 伝播関数と時間順序積

Dysonの摂動論において重要な因子は，時間順序積の行列要素 $\langle m|T\big\{\hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2) \ldots \hat{H}(t_n)\big\}|n\rangle$ である．$\hat{H}(t_i)$ を構成する場は，自由場の時間依存性に従う．

このような複雑な時間順序積の行列要素を，$\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\}|0\rangle$ や，$\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(x')\}|0\rangle$ のような 2 つの場の時間順序積の真空期待値と，簡単に行列要素を計算できる“正規積”(normal product) によって書き直すことを考えよう．2 つの場の時間順序積の真空期待値は，Feynmanの“伝播関数”(propagator) と呼ばれており，ダイヤグラムを用いた計算の際に，主要な道具となる．

ダイヤグラムでは，伝播関数を図 3.1 のように表す．

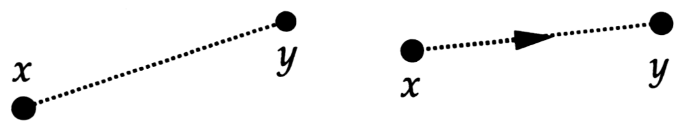


図 3.1 伝播関数 $\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\}|0\rangle$ と $\langle 0|T\{\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(y)\}|0\rangle$ を表すダイヤグラム．後者の図の矢印は $\hat{\varphi}^\dagger$ から $\hat{\varphi}$ へ向いている．

次の定義式から議論を始めよう．

$$
\begin{aligned}
iG(x,x') &= \langle 0|T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\}|0\rangle \\
&= \theta(x_0'-x_0)\langle 0|\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)|0\rangle + \theta(x_0-x_0')\langle 0|\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')|0\rangle
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

式の計算のために，中間状態として完全系一式を挿入できる．たとえば，

$$
\langle 0|\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}\langle 0|\hat{\varphi}(x')|\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{k}|\hat{\varphi}(x)|0\rangle \tag{3.17}
$$

であり，

$$
\langle 0|\hat{\varphi}(x')|\mathbf{k}\rangle = e^{-ikx'}, \quad \langle\mathbf{k}|\hat{\varphi}(x)|0\rangle = e^{ikx} \tag{3.18}
$$

なので，次式が得られる．

$$
iG(x,x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}\left\{e^{-ik(x'-x)}\theta(x_0'-x_0) + \theta(x_0-x_0')e^{+ik(x'-x)}\right\} \tag{3.19}
$$

Heavisideのステップ関数 $\theta(x_0'-x_0)$ は，次のように書ける．

$$
\theta(x_0'-x_0) = i\int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega(x_0'-x_0)}}{\omega+i\epsilon} \tag{3.20}
$$

また，部分分数分解により，次式が成立する．

$$
\frac{i}{2k_0}\left(\frac{1}{\omega-k_0+i\epsilon} - \frac{1}{\omega+k_0-i\epsilon}\right) = \frac{i}{\omega^2-(\mathbf{k}^2+m^2)+i\epsilon} \tag{3.21}
$$

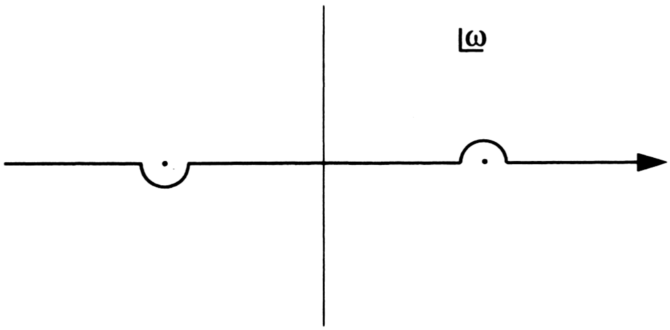


図 3.2 Feynmanの積分路.

ここでは k_0^2 を $(\mathbf{k}^2+m^2)$ と書き直した．これらを適用すると，式(3.19)は次のようになる．

$$iG(x,x') = \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{\omega^2-(\mathbf{k}^2+m^2)+i\epsilon}e^{-ik(x'-x)} \tag{3.22}$$

Lorentzの内積を用いて，上式を更に見やすい形にすると，

$$iG(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik(x'-x)} \tag{3.23}$$

となる．ここで用いられている k_0 (ω に相当する) は，ひとつの独立変数であり，$\mathbf{k}$ の関数ではない．すなわち式(3.23)の 4 元運動量は，質量殻 (mass-shell) $k^2=m^2$ のところに限定されているわけではない(これを 'off-shell' と言う)．

被積分関数は $\omega=\pm(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-i\epsilon)$ において極を持つ．ω の積分路が図 3.2 のように実軸上の極を回避しなければならないことが解っていれば，$i\epsilon$ を省略しても構わない．

この $G(x,x')$ を定義する積分は，変形Bessel関数として評価できるが，その表式が即座に必要となるわけではないので，これに関する議論は後まわしにする．

符号が正しいことを確認しよう．時間順序化の定義により，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
&(\partial_{x'}^2+m^2)\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\}|0\rangle \\
&= \langle 0|T\{(\partial_{x'}^2+m^2)\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\}|0\rangle + \delta(x_0'-x_0)\langle 0|\big[\hat{\varphi}(x'),\hat{\varphi}(x)\big]|0\rangle \\
&= \delta(x_0'-x_0)\left(-i\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\right) \\
&= -i\delta^4(x'-x)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

上式では，$(\partial_{x'}^2+m^2)\hat{\varphi}(x')=0$ と $\partial_{x_0}\theta(x_0)=\delta(x_0)$ の関係を用いた．

Klein-Gordon演算子を積分の式に作用させると，やはり同じ結果になる．

$$(\partial_{x'}^2 + m^2) iG(x',x) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2-m^2}{k^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik(x'-x)}$$
$$= -i\delta^4(x'-x) \tag{3.25}$$

Feynmanの伝播関数はKG方程式のGreen[2]関数であることが見て取れる．ωの積分路の選択の仕方はGreen関数の初期条件を指定する．このGreen関数は先進Green関数でも遅延Green関数でもなく，両者の特別な和となっている．あらかじめ予想し易いことではないが，これは時間順序積が重要な役割を果たすために不可欠な部分であり，この性質によって，時間順序積は簡潔な摂動論を構築する道具となり得るのである．

3.3 Wickの定理

3.3.1 正規積

次に“正規積”(normal product) を定義する．この定義は自由場に対してのみ意味を持つが，我々の目的のためには，それで十分である．

場を 2 つの成分に分解することにする．

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^{(+)}(x) + \hat{\varphi}^{(-)}(x) \tag{3.26}$$

$\hat{\varphi}^{(+)}$ は正の振動数の成分，すなわち $e^{-i\omega t}$ $(\omega > 0)$ の因子を持つ部分である．この部分は消滅演算子 $\hat{a}$ および $\hat{b}$ を含んでいる．$\hat{\varphi}^{(-)}$ は負の振動数の成分で，生成演算子を含む．

$\hat{\varphi}^{(\pm)}$ から成る単項式の正規積を，消滅演算子が右側に，生成演算子が左側になるように入れ替えたものと定義する．たとえば，

$$N\big(\hat{\varphi}^{(+)}(x_1)\hat{\varphi}^{(-)}(x_2)\hat{\varphi}^{(-)}(x_3)\hat{\varphi}^{(+)}(x_4)\big) = \hat{\varphi}^{(-)}(x_2)\hat{\varphi}^{(-)}(x_3)\hat{\varphi}^{(+)}(x_1)\hat{\varphi}^{(+)}(x_4) \tag{3.27}$$

である．すべての $\hat{\varphi}^{(-)}(x)$ は互いに交換するので，$\hat{\varphi}^{(-)}(x)$ 同士の順序は重要ではない．$\hat{\varphi}^{(+)}(x)$ 同士の順序も同様である．この正規積の定義を，線形性と分配則によって拡張し，演算子積の和にも適用する．

正規積の基本的かつ自明な性質は $\langle 0|N(\hat{O})|0\rangle$ がゼロになることである．但し $\hat{O}$ が恒等演算子 1 の場合だけは例外で $\langle 0|N(1)|0\rangle = 1$ となる．

[2]George Green：1793 年 7 月 14 日 Sneinton, Nottinghamshire (イギリス) 生まれ．1841 年 3 月 31 日 Sneintonにて死去．

明らかに,

$$T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big) = N\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big) + \text{c-number} \tag{3.28}$$

である．c-数の部分は真空期待値として計算できる．

$$\langle 0|\,T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big)|0\rangle = 0 + \text{c-number} \tag{3.29}$$

したがって，次式が成り立つ．

$$T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big) = N\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big) + \langle 0|\,T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big)|0\rangle \tag{3.30}$$

3.3.2 Wickの定理

Wickの定理は，式(3.30)を任意の数の演算子積へ一般化したものである．この定理は次のように表される．

$$\begin{aligned}
&T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\ldots\hat{\varphi}(x_N)\big)\\
&= N\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\ldots\hat{\varphi}(x_N)\big)\\
&\quad+\langle 0|\,T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big)|0\rangle N\big(\hat{\varphi}(x_3)\hat{\varphi}(x_4)\ldots\hat{\varphi}(x_N)\big) + \text{perms.}\\
&\quad+\langle 0|\,T\big(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\big)|0\rangle\langle 0|\,T\big(\hat{\varphi}(x_3)\hat{\varphi}(x_4)\big)|0\rangle N\big(\hat{\varphi}(x_5)\hat{\varphi}(x_6)\ldots\hat{\varphi}(x_N)\big) + \text{perms.}\\
&\quad+\ldots
\end{aligned} \tag{3.31}$$

左辺から右辺を作る方法は明確である．場の演算子の任意の対を任意の数だけ“縮約”(contract)して伝播関数にしてしまい，残りの演算子を正規積にするのである．この式を直接導出することもできるが，それは長く退屈な作業になる．むしろ母関数の形で表した定理を証明するほうが教育的であろう．

定理：$J(x)$ を c-数の関数とすると，次式が成り立つ．

$$T\Big\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\Big\} = N\Big\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\Big\}\, e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\langle 0|T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y))|0\rangle J(y)} \tag{3.32}$$

注意：$J(x) = iK(x)$ と置いて式を展開し，係数を比較すると，先に示した定理の式になる．i を挿入したのは，$J(x)$ が実であれば左辺がユニタリー演算子になるからである．

証明：A，B が $[A,B]$ と交換するならば $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ である．A，B が $\hat{\varphi}$ の和で表される場合は，自由場の演算子の交換子は c-数なので，この条件が成立する．したがって $t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1$ とし，$J(x)\hat{\varphi}(x)$ を $\hat{H}$ と書くと，時間順序積を次のように近似できる．

$$
\begin{aligned}
T\left\{e^{-i\int \hat{H}(t)dt}\right\} &\approx e^{-i\Delta t\hat{H}(t_n)} e^{-i\Delta t\hat{H}(t_{n-1})} \ldots e^{-i\Delta t\hat{H}(t_1)} \\
&= e^{-i\Delta t\sum_{i=1}^{n}\hat{H}(t_i)-\frac{1}{2}(\Delta t)^2\sum_{k>l}[\hat{H}(t_k),\hat{H}(t_l)]}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

時間の分割点 t_i を多くした極限では，和が積分に置き換わる．

$$
T\left\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\right\} = e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)} e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)J(y)\theta(x_0-y_0)[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)]}
\tag{3.34}
$$

これ自身有用な結果であるが，必要な結果には至っていない．

一方，正規積は，

$$
\begin{aligned}
N\left\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\right\} &\equiv e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}^{(-)}(x)} e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}^{(+)}(x)} \\
&= e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)} e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)J(y)[\hat{\varphi}^{(-)}(x),\hat{\varphi}^{(+)}(y)]}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

である．したがって次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
T\left\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\right\} &= N\left\{e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x)}\right\} \\
&\quad \times e^{\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)J(y)\left([\hat{\varphi}^{(-)}(x),\hat{\varphi}^{(+)}(y)]-\theta(x_0-y_0)[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)]\right)}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

指数の中の $\left[\hat{\varphi}^{(-)}(x),\hat{\varphi}^{(+)}(y)\right] - \theta(x_0-y_0)\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]$ はいささか複雑に見えるが，単なる c-数である．したがって真空期待値を計算すればよい．

$$
\begin{aligned}
&\left[\hat{\varphi}^{(-)}(x),\hat{\varphi}^{(+)}(y)\right] - \theta(x_0-y_0)\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right] \\
&\quad = \langle 0|\left[\hat{\varphi}^{(-)}(x),\hat{\varphi}^{(+)}(y)\right]|0\rangle - \theta(x_0-y_0)\langle 0|\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle \\
&\quad = \langle 0| - \hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(x) - \theta(x_0-y_0)\left[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)\right]|0\rangle \\
&\quad = -\langle 0|T\left(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right)|0\rangle
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

証明終り．

3.3.3 応用

湯川ポテンシャル

次の具体的な例を考えよう．

$$J(x) = g_1\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) + g_2\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) \tag{3.38}$$

この相互作用ハミルトニアンは，動かない $\hat{\varphi}$ 場の源が2つあることを表す．たとえば，$\hat{\varphi}$ 場の量子を生成したり消滅させたりできる2つの核子の系を表すものと考えることができる．

仮想的 (virtual) な $\hat{\varphi}$ 量子の交換によって生じる核子間力を調べよう．これを行うために，次の真空永続振幅 (vacuum persistence amplitude†) を用いる．

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle \tag{3.39}$$

g_1 と g_2 が，次のように時間に依存すると想定してみよう．まず，長い時間をかけて断熱的に相互作用の“スイッチ”が入り，非摂動の真空状態が，2つの源が存在する $\hat{H}$ の下での真空基底状態 $|0_J\rangle$ に時間発展する．それから長い時間をかけて再び“スイッチ”が切られ，元の非摂動真空状態 $|0\rangle$ に戻るものとする．時間に依存しないハミルトニアンに関して $U(t_2,t_1) = e^{i\hat{H}_0t_2}e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)}e^{-i\hat{H}_0t_1}$ であることを思い起こそう．$\hat{H}$ が時間に依存するならば，$U(t_2,t_1) = e^{i\hat{H}_0t_2}T\{e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}(t)dt}\}e^{-i\hat{H}_0t_1}$ となる．真ん中の因子はHeisenbergの時間発展演算子である．真空永続振幅は次のように与えられる．

$$\langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle = \langle 0|\,T\{e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}(t)dt}\}|0\rangle\, e^{iE_0(t_2-t_1)} \tag{3.40}$$

上式では $\langle 0|\hat{H}_0 = \langle 0|E_0$ と $\hat{H}_0|0\rangle = E_0|0\rangle$ の関係を用いた．断熱的な緩慢な $\hat{H}(t)$ の変化によって，$|0\rangle$ が $\hat{H}(t)$ の固有状態へと時間発展するので，十分によい近似として，

$$\langle 0|\,T\{e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{H}(t)dt}\}|0\rangle = e^{-i\int_{t_1}^{t_2}E(g(t))dt} \tag{3.41}$$

が成り立つ．ほとんどの時間において $E\big(g(t)\big)$ は，源が存在するときのエネルギー E_J に等しいので，

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle = e^{-i(E_J-E_0)T} \tag{3.42}$$

と書ける．T は源が存在する全時間である．

†(訳註) 同じ意味で“真空偏極”(vacuum polarization) という術語のほうがよく用いられる．

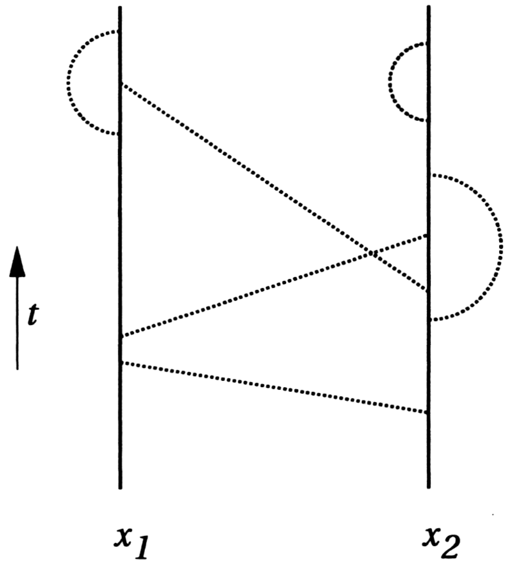


図 3.3 湯川型相互作用に寄与するダイヤグラムの一例.

定理により $e^{-i(E_J-E_0)T}$ は，次式に等しいことが分かる.

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\langle 0|T\left(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right)|0\rangle J(y)\right\} \tag{3.43}$$

$$= A\exp\left\{-g_1g_2\int dt_1 dt_2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik_0(t_1-t_2)}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}\right\} \tag{3.44}$$

係数 A は発散する“ 自己エネルギー ”(self-energy) を含むが，これは $G(x,y)$ の引き数が，両方とも同じ源の世界線上にある項から生じる．これらの項は，ある源から放出された仮想的な $\hat{\varphi}$ 粒子が，同じ源に吸収される過程に対応している．ここではこの問題に深入りせず，源の間の距離に対応する真空エネルギーの変化分だけを調べることにする.

t_1 と t_2 の積分から，因子 $2\pi\delta(k_0)T$ が現れる．したがって次式が得られる.

$$e^{-i\Delta ET} = A\exp\left\{-ig_1g_2T\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{-\mathbf{k}^2-m^2}\right\} \tag{3.45}$$

ここで現れた,

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{\mathbf{k}^2+m^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-m|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \tag{3.46}$$

は"湯川[3)]ポテンシャル"(Yukawa potential) である．これは次の 3 次元の方程式を満たす Green 関数でもある．

$$(-\partial^2 + m^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.47}$$

相互作用エネルギーは,

$$\Delta E = -g_1 g_2 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \tag{3.48}$$

であり,"引力"相互作用となっている．スカラー粒子 (もしくは偶数スピンを持つ粒子) の交換は，必ず引力を生じる．

Mössbauer 効果

$S = U(\infty, -\infty)$ の演算子の部分を，正規積の形にすることができる．S を関数 $J(x)$ を用いて，次のように書く．

$$S(J) = \text{c-number } e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}^{(-)}} e^{-i\int d^4x J(x)\hat{\varphi}^{(+)}} \tag{3.49}$$

$J(x)$ に関して，次の演算子を定義する．

$$\begin{aligned} \hat{a}(J) &= \int d^4x\, J(x)\hat{\varphi}^{(+)} \\ &= \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} J(x)\, \hat{a}_{\mathbf{k}}\, e^{-iE_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\, \hat{a}_{\mathbf{k}} \tilde{J}(k) \end{aligned} \tag{3.50}$$

$\tilde{J}(k)$ は質量殻上，すなわち $k_0 = E_{\mathbf{k}}$ の振動数における $J(x)$ の Fourier 変換である．J は実なので，$\tilde{J}(-k)^* = \tilde{J}(k)$ である．

$\hat{a}(J)$ の交換関係は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}(J), \hat{a}^\dagger(J)\right] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} |J(k)|^2 \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi |J(k)|^2 \delta(k^2 - m^2)\, \theta(k_0) \end{aligned} \tag{3.51}$$

$\hat{a}(J)$ および $\hat{a}^\dagger(J)$ は，特殊な規格化を施された消滅・生成演算子と考えることができる．正の量 $\langle 0|\left[\hat{a}(J), \hat{a}^\dagger(J)\right]|0\rangle$ を μ と書くと，次の状態,

$$|N\rangle = \mu^{-\frac{N}{2}} \frac{\left(\hat{a}^\dagger(J)\right)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \tag{3.52}$$

[3)] 湯川秀樹：1907 年 1 月 23 日東京生まれ．1981 年 9 月 8 日京都にて死去．1949 年ノーベル物理学賞．

は,

$$\langle N|N\rangle = 1 \tag{3.53}$$

のように規格化された状態になる.

上記の μ は,

$$K = \int d^4x d^4y\, J(x)J(y)\langle 0|\, T\big(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\big)|0\rangle \tag{3.54}$$

の実部でもある. 右辺を,

$$\int d^4x d^4y J(x) J(y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\, e^{-ik(x-y)} \tag{3.55}$$

と書き,

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x) \tag{3.56}$$

の関係を用いると, K を次のように書ける.

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \pi |J(k)|^2 \delta(k^2 - m^2) + \text{imaginary} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi |J(k)|^2 \delta(k^2 - m^2)\, \theta(k_0) + \text{imaginary} \end{aligned} \tag{3.57}$$

ここで被積分関数が k_0 について偶であることを見るために, $\tilde{J}(-k)^* = \tilde{J}(k)$ の関係を用いた.

これらの結果により, $S(J)$ を次のように書くことができる.

$$S(J) = e^{-i\hat{a}^\dagger(J)} e^{-i\hat{a}(J)} e^{-\frac{1}{2}\mu} \times (\text{phase}) \tag{3.58}$$

また,

$$|\langle N|S|0\rangle|^2 = \frac{\mu^N}{N!}\, e^{-\mu} \tag{3.59}$$

なので,

$$\sum_N |\langle N|S|0\rangle|^2 = e^{-\mu} \sum_N \frac{\mu^N}{N!} = 1 \tag{3.60}$$

である. 式(3.59)は, 系に J が作用して, 正確に N 個の量子を生成する確率である. この確率の総和は1となり, Poisson分布に従う. μ が有限であれば, 系に作用しても粒子を生成しない確率が $e^{-\mu}$ となる.

Mössbauer効果は, このような粒子の生成の欠如による効果である. 自由な原子核 (nucleus) が γ 線を放出すると, 核自身も反跳する. 光子のエネルギーは原子核の準位差よりも, 核子の反跳エネルギー分だけ小さくなるので, その光子が同位元素である他の原子核に入射しても, 原子核を基底状態から別の状態へ励起させるこ

とはできない．一方，原子核が結晶中にあると，原子核の崩壊は鋭い“衝撃”—— $J(x) \propto \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathrm{nucleus}})\,\delta(t-t_{\mathrm{rap}})$——として結晶に作用し，反跳エネルギーは生成されるフォノンによって運び去られる．しかし，たまたまフォノンが生成されず，全エネルギー $E_\gamma = E_{N^*} - E_{N^0}$ を持つ γ 線が放出されるような過程が生じた場合，そのとき発生した光子は，結晶中にある他の原子核を励起することができる．

この現象は，前章で言及した運動量と擬運動量の区別に関係している．結晶中のフォノンは“真の”エネルギーと“擬”運動量を運ぶ．結晶にはフォノンの生成がなくとも，Newton力学的な運動量 $|p| = E_\gamma/c^2$ が与えられる．しかし結晶は巨視的な質量を持つため，失われるエネルギー $\Delta E = |p|^2/2M_{\mathrm{crystal}}$ は，$N^0 \to N^*$ の共鳴エネルギーの幅に比べて無視できるほど小さい．

よく考えると，衝撃が結晶中で音速より速く伝えられることは有り得ないにもかかわらず，結晶全体が剛体のように反応できるのは何故かという問題は面白い．このパラドックスは不確定性原理に基づいて説明される．結晶中の N 個の原子のうち，ひとつの原子が衝撃 $\mathbf{I}$ を受けたときにフォノンを生成しないという過程は，衝撃を受ける直前に他の $N-1$ 個の原子のゼロ点振動が結晶全体で揃い，原子あたりの平均運動量が $\mathbf{I}/N$ になっているという稀な場合に起こるのである．自由な結晶にとって，運動量はよい量子数なので，衝撃を受ける直前の原子は $-(N-1)(\mathbf{I}/N)$ の運動量を持っている．衝撃を受けた原子は，他の原子と同様に $\mathbf{I}/N$ の運動量を持つので，他の原子の運動量への影響を考える必要はない．この場合，与えられた衝撃によって，ひとつの原子が他の原子集団に追随するようになるだけである．

第 4 章　Feynman規則

この章ではFeynmanダイヤグラムとFeynman規則を紹介する．読者はすでに演算子化した場の概念に慣れたであろうから，混乱する恐れのない限り，演算子にいちいちハット記号「^」を付けないことにする．

4.1　Feynmanダイヤグラム

4.1.1　時空におけるダイヤグラム

高エネルギー物理の実験は，大抵の場合，粒子が他の粒子を散乱する過程を含む．そのような過程を考察するとき，時間発展演算子 $U(\infty, -\infty)$ は，粒子が互いに十分離れていて相互作用を無視できる無限の過去の状態から，衝突後十分な時間を経て，粒子が互いに遠く離れた状態に至るまでの，相互作用描像における状態ベクトルの時間発展を示す．この重要な役割のために，演算子 $U(\infty, -\infty)$ は特別に“ S 行列 ”(S は散乱 scattering の意) と呼ばれる．S 行列は，

$$S = U(\infty, -\infty) = T\left\{\exp\left(-i\int H_{\mathrm{I}} d^4x\right)\right\} \tag{4.1}$$

と表される．積分は全時空にわたって実行する．

最も単純な $H_{\mathrm{I}} = \lambda\varphi^4/4!$ の相互作用を考えよう．時間順序化を施された指数関数を展開し，各項にWickの定理を適用して，演算子対を縮約した伝播関数と，生成演算子と消滅演算子を含む正規積にする．後者の正規積によって，与えられた初期状態と終状態の間のダイヤグラムに対応する S 行列の行列要素が決まる．

S 行列への 1 次の寄与として，図 4.1 のダイヤグラムが見いだされる．

ダイヤグラム中の黒点は相互作用の“ 結節点 ” (vertex†) を表しており，それぞれに因子 λ があてがわれる．

---

†(訳註) vertex の訳語を，そのまま“ バーテックス ”もしくは“ 頂点 ”とする文献も多いが，“ 結節点 ”という訳語を充てたほうが，意味を把握しやすいであろう．

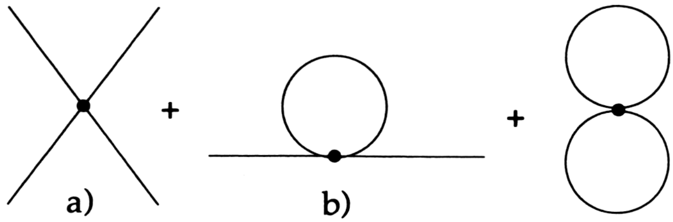


図 4.1 S行列の 1 次の項に対応するダイヤグラム．

たとえばダイヤグラム a) は，次のような項に対応する．

$$-i\lambda\frac{1}{4!}N\Big\{\big(\varphi(x)\big)^4\Big\} \tag{4.2}$$

これを行列要素にするときには，因子 $\frac{1}{4!}$ は，外部の状態と正規積を対応させる組み合わせの数と打ち消し合って消滅する．

ダイヤグラム b) は，次のような項に対応する．

$$-i\lambda\frac{1}{2}\int d^4x\big(iG(x,x)\big)\frac{1}{2}N\{\varphi(x)\varphi(x)\} \tag{4.3}$$

ここでも正規積の前にある $\frac{1}{2}$ は，行列要素にすると消滅する．

2 次のダイヤグラムを示すと図 4.2 のようになる．ダイヤグラム c) は，次式に対応する．

$$(-i\lambda)^2\frac{1}{3!}\int d^4xd^4x'\big(iG(x,x')\big)^3\frac{1}{2}N\{\varphi(x)\varphi(x')\} \tag{4.4}$$

ダイヤグラム c) との対応関係は，因子 $\frac{1}{3!}$ を除いてすべて明らかであろう．$\frac{1}{3!}$ は " 対称性因子 " (symmetry factor) の一例である．

対称性因子は，各結節点に各線を接続する方法を数え上げることで簡単に求まる．対称性因子を求めるもうひとつのやり方としては，グラフの自己同形群の位数の逆数を算出する方法がある．たとえば図 4.3 に示した " すぐり " のグラフ ('gooseberry' graph) の因子 1/48 は，4 本の線同士と 2 つの結節点同士を置き換えてもグラフの形が変わらないことによって生じている．自己同形群は $S_4 \otimes Z_2$ で，この群の位数は $4! \times 2 = 48$ である．

外線を持たないダイヤグラムに対応する項は正規積を含まず，散乱過程の記述には不要である．これらは " 真空泡 " (vacuum bubble) と呼ばれるダイヤグラムで，

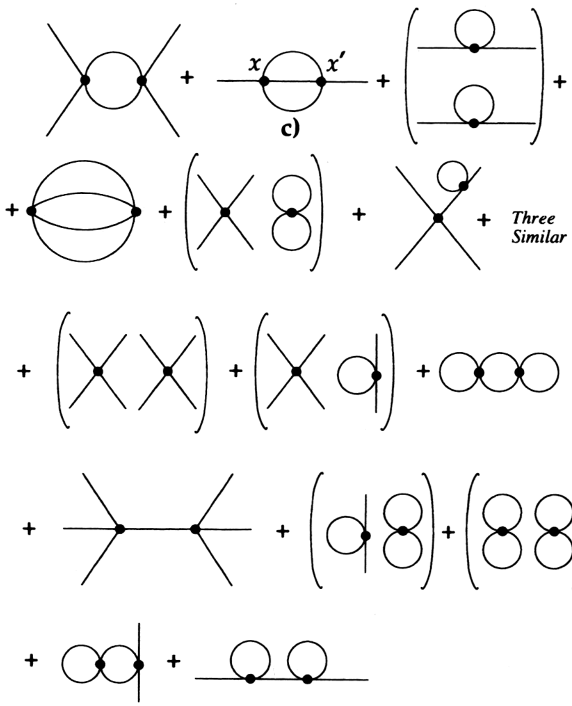


図 4.2　S 行列の 2 次の項に対応するダイヤグラム．

相互作用の効果が，どのように真空状態のエネルギーや構造に影響するかを決めている．

真空泡の因数分解

真空泡のダイヤグラムとは，外線に結合していないダイヤグラムのことである．

$n+p$ 個の結節点を持つ，任意のダイヤグラムを考えよう．これは λ^{n+p} の項に相当する．このうち n 個の結節点は，外線に接続しているダイヤグラムの部分に含まれ，p 個の結節点は泡に含まれているものとする．そうすると，このダイヤグラムは次の因子を含む．

$$\frac{1}{(n+p)!}\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} \times \text{(externally connected parts)} \times \text{(bubbles)} \tag{4.5}$$

$1/(n+p)!$ は，時間順序化した指数関数の定義に現れる $1/n!$ と，全結節点を 2 組に

分ける方法の組み合わせ因子によって生じている．この組み合わせは，

$$\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} = \frac{(n+p)!}{n!p!} \tag{4.6}$$

なので，ダイアグラムの和は次のように分解される．

$$\left\{\sum_n \frac{1}{n!}(\text{externally connected parts})\right\} \times \left\{\sum_p \frac{1}{p!}(\text{bubbles})\right\} \tag{4.7}$$

したがって，

$$\langle a|S|b\rangle = \langle a|S'|b\rangle\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle \tag{4.8}$$

となる．S' は真空泡を省いて計算される．後ろの因子は，前章で見た真空永続振幅である．非摂動の真空状態が安定で，自壊していないものと仮定すると (常に正しいわけではないが，有用な仮定である)，真空永続振幅は位相だけに寄与を持ち，$|\langle a|S|b\rangle|^2$ で決まる断面積には影響しない．

実際に，この因数分解によって，ある物理的な議論を導くことができる．第3章で見たように，真空永続振幅 $\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle$ は，次のように評価できる．

$$\begin{aligned}\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle &= \langle 0|e^{iH_0T}e^{-iHT}|0\rangle \\ &= e^{-i(E-E_0)T}\end{aligned} \tag{4.9}$$

E と E_0 はそれぞれ H と H_0 の基底エネルギー，T は系の存続時間である．真空泡を見ると，分離したそれぞれの泡のダイヤグラムは，x に関する1回の積分と，結節点に付随する相対座標に関する複数回の積分を含む．したがって，分離したそれぞれの泡のダイヤグラムは，因子 VT を持つ．V は系の体積である．2つの泡を持つダイヤグラムは $(VT)^2$ に比例し，3つの泡を持つダイヤグラムは $(VT)^3$ に比例する．このような議論によって，次の結果が得られる．

$$\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle = e^{-iW} \tag{4.10}$$

$$W = iVT(\text{connected diagrams}) \tag{4.11}$$

式(4.11)のダイヤグラムを評価するときには，ひとつの結節点を固定してしまえばよく，ダイヤグラムを時空間内のすべての位置にわたって積分する必要はない．

真空エネルギー密度 $\mathcal{E}_0$ は，各々の真空泡ダイヤグラムを1回ずつ足し合わせたダイヤグラムの総和として与えられる (図 4.3)．

この結果は Brueckner-Goldstone (もしくは Bethe-Goldstone) の定理と呼ばれている．演習問題として，ここで得られるエネルギーシフトが実数となることを，各自において確認されたい．

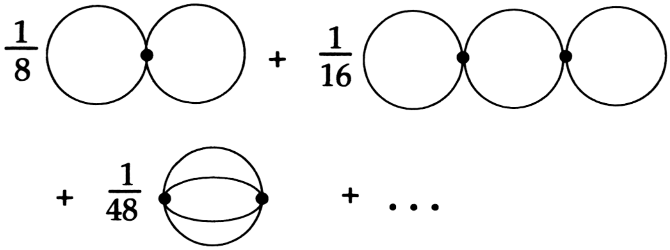


図 4.3　真空のエネルギー密度に寄与する連結ダイヤグラムと，それぞれの対称性因子.

外線の自己エネルギー

省くことが可能なもうひとつの種類のダイヤグラムは，外線に"自己エネルギー"(self-energy) を挿入したダイヤグラムである．図 4.2 の最後の列のダイヤグラムがこれにあたる．他の外線を含まない相互作用は，相互作用のない"裸の"単一粒子の状態を正確な固有状態にするだけなので，無視することにする．

状態の発展に伴い，これらのダイヤグラムは粒子の質量に繰り込みを施し，φ が状態に結合する効率を修正する．この修正によって，真空と 1 粒子状態の間の Heisenberg場の行列要素は，次のようになる．

$$\langle \mathbf{k}|\varphi(x)|0\rangle = \sqrt{Z}e^{-ikx} \tag{4.12}$$

行列要素の x 依存性が上式のようになることは，すでに第 2 章で見ている．係数の Z は必ず 1 以下であり，"波動関数の繰り込み定数" (wave function renormalization constant) と呼ばれる．これについては後の章でも議論する．

4.1.2　運動量空間のダイヤグラム

次の行列要素を見てみよう．

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'|S|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= -i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \langle \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'|\, N\big(\varphi(x)^4\big)\, |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle \\ &= -i\lambda\int d^4x\, e^{ik_2'x}e^{ik_1'x}e^{-ik_1x}e^{-ik_2x} \\ &= -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(k_1' + k_2' - k_1 - k_2)\end{aligned} \tag{4.13}$$

4! が 1 粒子状態と 4 つの場の演算子の組み合わせの方法によって消滅することに注意されたい．それぞれの結節点における積分から，エネルギー－運動量を保存するデルタ関数が発生する．

相互作用を持つ系にダイヤグラムを適用するときの，一般的な一連の手続きを，“Feynman[1]規則”(Feynman rules) と呼ぶ．$\lambda\varphi^N/N!$ の相互作用を持つ系の Feynman規則を以下に示す．

- 考察する過程のダイヤグラムをすべて描く．ただし真空泡と，外線の自己エネルギーは無視する．
- 各結節点に $-i\lambda(2\pi)^4\delta^4(p_{\text{out}}-p_{\text{in}})$ をあてる．
- 各線に伝播関数 $\dfrac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$ をあてる．それぞれの線に異なる p_i を用いる．
- 対称性因子を掛ける．
- 各線について $\displaystyle\int\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$ の積分を行う．

最後の積分はエネルギー－運動量デルタ関数によって簡単になる．ほとんどの積分は，単にそれぞれの結節点において，4元運動量の保存を課するだけのことになる．ダイヤグラムに V 個の結節点と L 本の線 (内線) が含まれるならば，実際に実行すべき積分の数は $N_{\text{loop}}=V-L+1$ である――“1”は外線に対する全体のエネルギー－運動量保存から現れる．具体的にグラフを調べてみると，N_{loop} はダイヤグラム中の独立なループの数を表すことが分かる．これはグラフを電気回路と見なしてKirchhoffの法則を適用したときに得られる方程式の数と同じである．電気回路における“ループ電流”と同様な“ループ運動量”の概念は有用である．

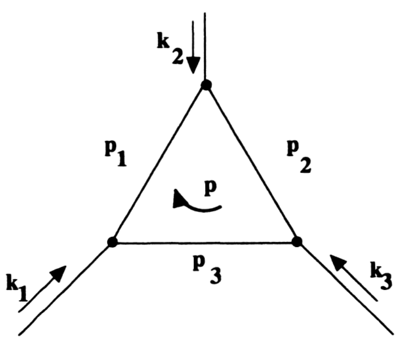


図 4.4 運動量変数の配置の例．

[1]Richard Phillips Feynman：1918年5月11日 New York (ニューヨーク州) 生まれ．1988年2月15日 Los Angeles (カリフォルニア州) にて死去．1965年ノーベル物理学賞．

たとえば $\lambda\varphi^3$ 理論における図 4.4 のグラフは，ループを巡る運動量 p によって，

$$(-i\lambda)^3(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p_1^2-m^2}\frac{i}{p_2^2-m^2}\frac{i}{p_3^2-m^2} \tag{4.14}$$

と表される．ここで，

$$p_1=p+k_1,\quad p_2=p+k_1+k_2,\quad p_3=p+k_1+k_2+k_3\equiv p \tag{4.15}$$

である．

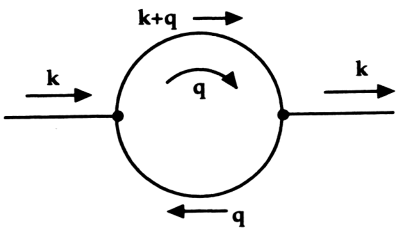


図 4.5　自己エネルギーのグラフ．

同様に，図 4.5 のグラフは，ループ運動量を q として，

$$(-i\lambda)^2(2\pi)^2\delta^4(k-k')\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k+q)^2-m^2}\frac{i}{q^2-m^2} \tag{4.16}$$

と表される．

4.2　散乱の理論

$\lambda\varphi^3$ 理論では，3 つのダイヤグラムが，2 体の散乱過程 $p_1,p_2\to p_1',p_2'$ への最低次の寄与を生じる．

これらのダイヤグラムから，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{p}_1',\mathbf{p}_2'|S|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\rangle\\
&\quad=(-i\lambda)^2(2\pi)^4\delta^4(k-k')\\
&\qquad\times\left\{\frac{i}{(p_1+p_2)^2-m^2}+\frac{i}{(p_1-p_1')^2-m^2}+\frac{i}{(p_1-p_2')^2-m^2}\right\}\\
&\quad=(-i\lambda)^2(2\pi)^4\delta^4(k-k')\left\{\frac{i}{s-m^2}+\frac{i}{t-m^2}+\frac{i}{u-m^2}\right\}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

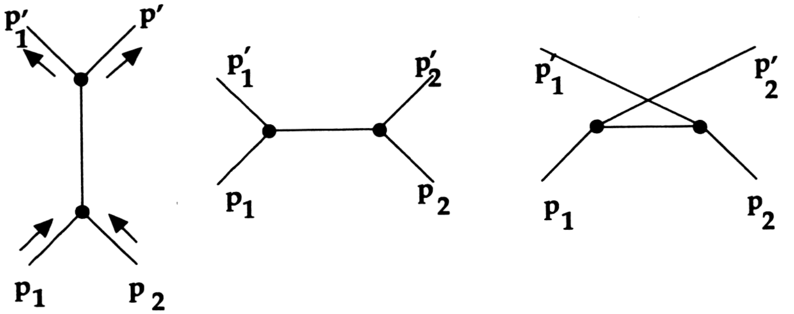


図 4.6 3 つの“木”(tree) のダイヤグラム.

ここで導入した s, t, u は, 標準的に用いられている Lorentz不変な運動学的不変量 (kinematic invariant) である.

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = \text{squared center of mass energy} \\
t &= (p_1 - p_1')^2 = \text{squared momentum transfer} \\
u &= (p_1 - p_2')^2
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

これらの変数は, 互いに独立ではない. 各外線が, それぞれ別種の粒子に対応する一般的な散乱過程において,

$$
\begin{aligned}
s + t + u &= (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_1')^2 + (p_2')^2 + 2p_1(p_2 - p_1' - p_2' + p_1) \\
&= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

という関係が成立する. m_i は, 4 本の外線に対応する各粒子の質量である.

4 つの粒子の質量がすべて等しければ, これらの不変量は単純な形になる. 2 体の散乱角を θ, 運動量を $\mathbf{k}$ とすると, 次のように表される.

$$
\begin{aligned}
s &= 4(m^2 + \mathbf{k}^2) \\
t &= -2\mathbf{k}^2(1 - \cos\theta) \\
u &= -2\mathbf{k}^2(1 + \cos\theta)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

θ が実数で, $\mathbf{k}^2 > 0$ の物理的な領域では, s は常に正で, $s > 4m^2$ であり, また t は常に負である.

散乱振幅は, s, t, u が粒子の質量の自乗に等しくなるところで, それぞれに極を持つ. これらを s チャネル, t チャネル, u チャネルからの寄与による極と称す

る．中間状態の粒子が不安定であれば，s，t，u の極が複素数に移行し，振幅は発散せずに大きな有限の値になる．この場合には，これらのチャネルにおいて“共鳴”(resonance) が起こる．このことは，次章で更に詳しく議論する．

4.2.1 散乱断面積

2 体状態から n 体状態への一般的な散乱振幅，

$$\langle \mathbf{p}'_1, \ldots \mathbf{p}'_n | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle p_{\mathrm{f}} | S | p_{\mathrm{i}} \rangle \tag{4.21}$$

を考えよう．S からエネルギー－運動量デルタ関数を分離して，次のように T_{fi} を定義する†．

$$\langle p' | S | p \rangle = (2\pi)^4 i \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) T_{\mathrm{fi}} \tag{4.22}$$

ここで $p_{\mathrm{f}} = \sum p'$，$p_{\mathrm{i}} = p_1 + p_2$ である．$\mathrm{i} \to \mathrm{f}$ の遷移を起こす確率は，次式で表される．

$$|\langle p' | S | p \rangle|^2 = \left((2\pi)^4 \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) \right)^2 |T_{\mathrm{fi}}|^2 \tag{4.23}$$

デルタ関数の自乗はどのような意味を持つのだろうか？ 任意の関数 f について $\delta(x) f(x) = \delta(x) f(0)$ であることから，発見論的に $\delta(x)^2$ を $\delta(0)\delta(x)$ に置き替えられるものと考えて，これを式(4.23)に適用してみよう．第 1 章と同様に $(2\pi)^4\delta^4(0)$ は宇宙の体積と存続時間の積を表すものと解釈できる．したがって遷移確率は，次のように表されるものと推定される．

$$|\langle p' | S | p \rangle|^2 = (\mathrm{Volume})(\mathrm{Time})(2\pi)^4 \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) |T_{\mathrm{fi}}|^2 \tag{4.24}$$

言い替えると，単位体積あたりの $\mathrm{i} \to \mathrm{f}$ の遷移頻度は，次式で表される．

$$\Gamma_{\mathrm{fi}} = (2\pi)^4 \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) |T_{\mathrm{fi}}|^2 \tag{4.25}$$

式(4.25)は，実際に正しい式であり，Fermiの“黄金律”(Golden Rule) に合致する．読者は既に量子力学の授業で，黄金律の導出方法を学んでいるであろう．時間に依存する摂動論によると，新しい状態への遷移振幅は，一般に経過時間 t に比例する．したがって特定の新しい状態への“遷移確率”は t^2 に比例する．しかし連続準位への遷移の際には，エネルギーと時間の不確定性関係により，有効なエネル

†(訳註) 遷移行列 T_{fi} の一般的な定義からすると，式(4.22)の右辺は $\langle p' | p \rangle + (2\pi)^4 i \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) T_{\mathrm{fi}}$ とすべきであるが (式(5.1)参照)，ここでは非対角要素だけを扱うものとして $\langle p' | p \rangle$ の項を省いてある．遷移行列の符号を反転させて $\langle p' | S | p \rangle = \langle p' | p \rangle - (2\pi)^4 i \delta^4(p_{\mathrm{f}} - p_{\mathrm{i}}) T_{\mathrm{fi}}$ とおく流儀もある．

ギー準位の範囲が t に反比例する．正味の効果としては，許容されたエネルギー範囲への遷移確率だけが現れることになり，これは経過時間に比例する．

終状態の制限範囲へ遷移する頻度は，次式のようになる．

$$\Gamma = \sum_{\text{states}} (2\pi)^4 \delta^4(p_{\text{f}} - p_{\text{i}}) |T_{\text{fi}}|^2 \tag{4.26}$$

遷移頻度と散乱断面積 σ の関係は，

$$\Gamma = \sigma \rho_1 \rho_2 |v_{12}| \tag{4.27}$$

と表される．ρ_1 は対象粒子の数密度，ρ_2 はビーム粒子の数密度，$|v_{12}|$ は対象粒子とビーム粒子の相対速度である (それぞれ次元は $[\Gamma] = L^{-4}$，$[\sigma] = L^2$，$[\rho] = L^{-3}$，$[v_{12}] = L^0$)．したがって断面積は，次式で与えられる†．

$$\sigma = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 |v_{12}|} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_i'}} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_{\text{f}} - p_{\text{i}}) |T_{\text{fi}}|^2 \tag{4.28}$$

積分は必要な範囲で実行する (大抵は検出器の特性などによる制約がある)．全断面積を求めるなら，到達可能な相空間全体にわたる積分を行う．式(4.28)の $1/n!$ は，終状態が n 個の同種粒子を含むことによる因子である．

断面積 σ は Lorentz 不変な量であり，$|T_{\text{fi}}|^2$ の積分は，Lorentz 不変な相空間 (LIPS) について行われる．したがって $\rho_1 \rho_2 |v_{12}|$ も Lorentz 不変である．

定理：流束因子 (flux factor) は，Lorentz 不変な次の表式で与えられる‡．

$$\begin{aligned} \rho_1 \rho_2 |v_{12}| &= 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \\ &= 8i\Delta(\sqrt{s}, m_1, m_2) \end{aligned} \tag{4.29}$$

$\Delta(a, b, c)$ は "長さが a, b, c の辺を持つ三角形の面積" を表す．

注意：3 辺の長さが $\sqrt{s}$，m_1，m_2 の "三角形" の "面積" は虚数になるので，係数に i が付く．実際の三角形で 1 辺の長さが残りの 2 辺の長さの和よりも大きくなることはあり得ないが，実数の運動量を持つ粒子系の重心のエネルギー $\sqrt{s}$ は，それ

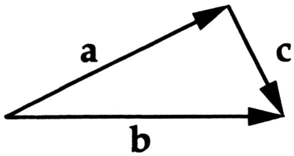
---

†(訳註) 本書の構成上，第 6 章までは Bose 粒子場だけを対象としているので，式(4.28)のような式は無条件に成立する一般式ではない．本書の規格化の流儀 (式(2.3)-(2.4)および式(7.59)-(7.60)参照) に従えば，Fermi 粒子を扱う際には，因子 $1/2E$ の代わりに m/E が現れる．

‡(訳註) p_1，p_2 は質量殻条件 $p^2 = m^2$ を満たすので，式(4.29)右辺第 1 式は $4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$ と書かれる場合が多い．

ぞれの粒子の静止質量の和よりも常に大きい．

証明：まず三角形の各辺の長さから面積を与える，有名な Heron[2)]の定理を証明する．



任意の次元の空間内で三角形を考え，各辺がベクトル **a**，**b**，**c** で表されるものとすると，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}
a^2b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 &= a^2b^2(1-\cos^2\theta) = a^2b^2\sin^2\theta = 4(\mathrm{Area})^2 \\
&= a^2b^2\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 - a^2 - b^2\right)^2 = a^2b^2 - \frac{1}{4}\left(c^2 - a^2 - b^2\right)^2 \\
&= a^2b^2 - \frac{1}{4}\left(c^4 + a^4 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right) \\
&= 4\big(\Delta(a,b,c)\big)^2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$\Delta(a,b,c)$ は，次のように定義される．

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&\qquad = \Delta(a,b,c) \equiv \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

s は三角形の " 半周長 " である $(s \equiv (a+b+c)/2)$．

この s と 3 辺の長さで三角形の面積を表す式は，電卓の出現以前の時代には，高校で標準的に習う公式であった．しかし今日の学生は，この式にあまり馴染みがないようなので，証明を与えた．

ここで，次の量を考えてみよう．

$$I = (p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2 \tag{4.32}$$

粒子 1 が静止しているものとすると，$p_1 = (E_0, 0)$，$p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ とおける．

$$\begin{aligned}
I &= E_1^2E_2^2 - E_1^2\left(-\mathbf{p}_1^2 + E_2^2\right) = \mathbf{p}_2^2E_1^2 \\
&= \left|\frac{\mathbf{p}_2}{E_2}\right|^2 E_1^2E_2^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2(\rho_1\rho_2|v_{12}|)^2
\end{aligned} \tag{4.33}$$

2)Alexandria の Heron：65年頃 Alexandria (エジプト) で生誕と推定される．125年頃没．

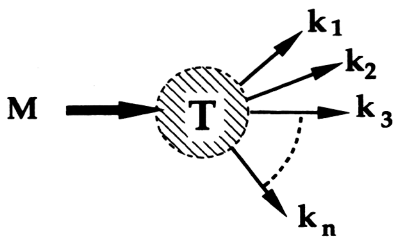


図 4.7 崩壊する粒子.

最後の式では，粒子の速度が $|\mathbf{p}|/E_\mathbf{p}$ であることと，平面波状態 $|\mathbf{p}\rangle$ が相対論的に規格化されていて，単位体積あたりの粒子数が $2E_\mathbf{p}$ であることを用いた.

したがって，次式が成立する.

$$\rho_1\rho_2|v_{12}| = 8i\Delta(\sqrt{s}, m_1, m_2) \tag{4.34}$$

4.2.2 不安定な粒子の崩壊

質量 M で 4 元運動量が $K = (M, 0)$ の，静止した (それゆえ完全に非局在の) 粒子が，n 個の同種粒子に崩壊する過程を考える．崩壊後の各粒子の運動量を $\mathbf{k}_i$, $i = 1, \ldots, n$ とする．単位体積で単位時間あたりに起こる崩壊の回数は，崩壊後の各粒子の運動量を Lorentz 不変な相空間の中で積分する式で与えられる.

$$\Gamma = \frac{1}{n!}\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)(2\pi)^4\,\delta^4\Bigl(\sum k_i - K\Bigr)\,|T_{\mathrm{fi}}|^2 \tag{4.35}$$

崩壊前の不安定な粒子の数密度は $2M$ なので，この不安定な粒子の寿命 (lifetime) τ は次式で与えられる.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2M}\frac{1}{n!}\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)(2\pi)^4\,\delta^4\Bigl(\sum k_i - K\Bigr)\,|T_{\mathrm{fi}}|^2 \tag{4.36}$$

[寿命 τ は存続確率 $P(t)$ の減衰時間として定義される．$P(t) \propto e^{-t/\tau}$.]

式(4.36)は有用な式であるが，我々はすぐ後からこの式を全く別の方法で導く．そこでは粒子の性質への，高次ループの効果に関する知見が得られる.

第 5 章　ループ・ユニタリー性・解析性

この章では，量子力学的な確率保存の要請に起因するユニタリー性が，摂動展開とどのように関係するかを調べる．

5.1　S 行列のユニタリー性

S 行列から，状態に変化を起こさない成分を分離すると都合がよい．次のように遷移行列 (transition matrix) T を定義する．

$$S = 1 + iT \tag{5.1}$$

そうすると，S 行列のユニタリー性 (unitarity) $S^\dagger S = 1$ によって，次の関係が成り立つ．

$$1 = 1 - i(T^\dagger - T) - T^\dagger T \tag{5.2}$$

したがって，

$$T^\dagger T = 2\,\mathrm{Im}\,T \tag{5.3}$$

である．この恒等式から次式が得られる．

$$2\,\mathrm{Im}\,\langle n|T|n\rangle = \sum_m |\langle m|T|n\rangle|^2 \tag{5.4}$$

式(5.4)の意味するところは，何らかの過程 (状態 $|n\rangle$ から，他の任意の状態への遷移) が起こる確率は“元の状態に戻る振幅”の虚部に比例するということである．これは“光学定理”(optical theorem) と同じ内容を表している．

図 5.1 のような泡のグラフの虚部を計算することによって，式(5.4)のダイヤグラムにおける意味を見てみよう．泡は n 本の内線を持つ．このダイヤグラムの対称性因子は $1/n!$ である．ループが $n-1$ 個あるので，このダイヤグラムは p 空間では扱いにくいが，x 空間では $G(x_1, x_2)^n$ の x_1 と x_2 に関する単純な積分によって評価できる．伝播関数を時間順序積の部分で分割すると，次式を得る．

$$\int d^4x_1 d^4x_2\, e^{-ipx_1+ip'x_2}$$

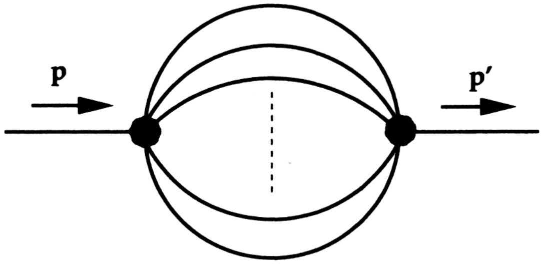


図 5.1 泡のグラフ.

$$\times\left[\theta(x_2^0 - x_1^0)\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)e^{-i(k_1+\ldots+k_n)(x_2-x_1)}\right.$$
$$\left.+\,\theta(x_1^0 - x_2^0)\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)e^{+i(k_1+\ldots+k_n)(x_2-x_1)}\right](-i\lambda)^2 \quad (5.5)$$

$x_2 - x_1 = z$ と置き，x_1 を積分すると，

$$(2\pi)^4\delta^4(p-p')\int d^4z\, e^{ipz}[\ldots](-i\lambda)^2 \quad (5.6)$$

となる．T を計算しているので，エネルギー－運動量デルタ関数は省く．

最後に z に関する積分を行うと，$(-i\lambda)^2$ 以外の部分は次のようになる．

$$-i\left[\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)(2\pi)^3\,\delta^3\left(\mathbf{p}-\sum\mathbf{k}\right)\frac{i}{p_0-(E_1+\ldots E_n)+i\epsilon}\right.$$
$$\left.+\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}}\right)(2\pi)^3\,\delta^3\left(\mathbf{p}-\sum\mathbf{k}\right)\frac{i}{-p_0-(E_1+\ldots E_n)+i\epsilon}\right] \quad (5.7)$$

上式の 2 つの項は，エネルギー差を分母にした分数因子を加えて中間状態に関する総和を求める “ 初等的な ” Rayleigh-Schrödinger摂動のダイヤグラムに対応している．

図 5.2 の左側のダイヤグラムでは，中間状態 (破線で示した時刻を考える) が $E_1 + E_2 + E_3$ のエネルギーを持つので，分数因子は，

$$\frac{1}{p_0 - E_1 - E_2 - E_3} \quad (5.8)$$

である．一方，右側のダイヤグラムの中間状態は，$2p_0 + E_1 + E_2 + E_3$ のエネル

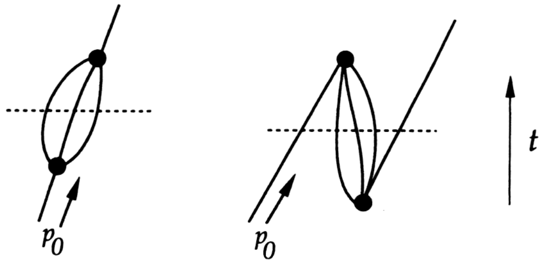


図 5.2 時間順序化したRayleigh-Schrödingerダイヤグラム.

ギーを持つので，分数因子は次のようになる．

$$\frac{1}{p_0 - 2p_0 - E_1 - E_2 - E_3} = \frac{1}{-p_0 - E_1 - E_2 - E_3} \tag{5.9}$$

初等的なアプローチでは，結節点において運動量は保存するが，エネルギーは保存しない．Feynmanの摂動論における N 次のダイヤグラムのひとつひとつは，初等的な摂動論において結節点の時間順序を並べ替えた $N!$ 個のダイヤグラムに対応させることができる．Rayleigh-Schrödingerの摂動論でよく知られている“相殺項”(counterterms) は，真空泡を省く処方となっている．

虚部を評価してみよう．$p^0 > 0$ を仮定すると，第 1 項だけが寄与を持つ．よく知られた，

$$\frac{1}{\omega + i\epsilon} = \frac{P}{\omega} - i\pi\delta(\omega) \tag{5.10}$$

という関係を用いると，次式が得られる．

$$2\,\mathrm{Im}\,T = \frac{1}{n!}\int \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_i}} \right) (2\pi)^4\,\delta^4\Big(p - \sum k\Big)\,|\lambda|^2 \tag{5.11}$$

これは，それぞれの終状態に関する断面積の総和である．

したがって，この次数までで，次式が成り立つ．

$$2\,\mathrm{Im}\,\langle \mathbf{p}|T|\mathbf{p}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\langle\{\mathbf{k}\}|T|\mathbf{p}\rangle|^2 \tag{5.12}$$

前方散乱振幅の虚部を“吸収部分”(absorptive part) と呼ぶことがある．これは中間状態における，仮想的でない実粒子の励起に対応する．

ダイヤグラム表現における，一般的なユニタリー性の定式化はLandau-Cutkoskiの切断公式を含んだものになる．これはEden, Landshoff, Olive and Polkinghorneによる専門書 *Analytic S-Matrix* において入念に検討されている．

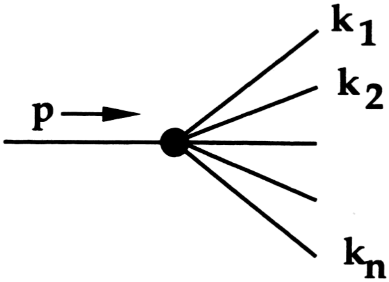


図 5.3 終状態.

5.2 解析的 S 行列

5.2.1 解析性の起源

物理系は“因果的”(causal) である．定常状態にある粒子は，擾乱を被らない限り，その状態を保つ．粒子が外からの擾乱を事前に察知することはなく，擾乱による変化は必ず擾乱の後に現れる．このことが，粒子の挙動を表す Green 関数の解析的性質の起源となる．減衰のある振動子の運動方程式を考えてみよう．

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\Omega^2 + \gamma^2)x = F(t) \tag{5.13}$$

解を次の形で書くことができる．

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')F(t')dt' \tag{5.14}$$

$t < t'$ において Green 関数は $G(t,t') = 0$ である．この場合，

$$x(t) = \frac{1}{\Omega}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\sin\Omega(t-t')F(t')dt' \tag{5.15}$$

であり，Green 関数は次のようになる．

$$G(t,t') = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega}e^{-\gamma(t-t')}\sin\Omega(t-t') & t > t' \\ \\ 0 & t < t' \end{cases} \tag{5.16}$$

$G(t,0)$ の Fourier 変換は，積分が 0 から $+\infty$ なので，次の積分式，

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\Omega}\int_{0}^{\infty} e^{i\omega t}e^{-\gamma t}\sin\Omega t\, dt \tag{5.17}$$

は $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ であれば収束して，

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega + i\gamma)^2 - \Omega^2} \tag{5.18}$$

となる．$\tilde{G}$ は ω の上半面に特異点を持たない．

同様に因果的な応答関数の Fourier 変換は，ω の上半面において解析的な関数となる．この解析性は系の散乱を表すS行列の k 空間行列要素にもあてはまる．解析性は重要な概念である．関数が解析的であれば，任意の点の近傍に関する詳細な情報が分かるだけで，関数が定義される全領域の関数形を決めることができる．

5.2.2 ユニタリー性と分岐切断線

すでに見たように，S行列は因果律の要請によって解析的な関数となる．S行列は Lorentz 不変なので，各外線の運動量によって作られる Lorentz 不変量を引き数とする解析関数でなければならない．ユニタリー性の条件はS行列に多くの制約を与えるので，ユニタリー性だけに頼った方法論で一意的にS行列を決定できるかも知れないと期待された時代があった．このような考え方は，現実的な4次元の理論においてあまり役に立たないことが明らかになったが，興味深い種々の2次元モデルの正確なS行列を与えることには成功を収めた．この節では，解析性とユニタリー性の組み合わせに起因するいくつかの帰結を見てみることにする．

2粒子状態から2粒子状態への散乱過程を考察する．

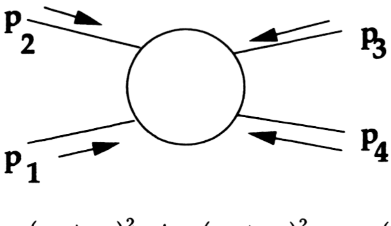


図 5.4 $s = (p_1 + p_2)^2$，$t = (p_1 + p_4)^2$，$u = (p_1 + p_3)^2$.

変数 s は，入射する2粒子の質量中心エネルギーの自乗であるが，これを徐々に増加させることを考えよう．質量殻上に生成できる中間状態の粒子数が増えるような入射エネルギー値のところで，遷移振幅の虚部に新たな寄与が現れる．この新たな虚数成分は，振幅を表す解析関数の実軸上の“飛躍”(discontinuity)，すなわち“分岐切断線”(branch cut) から発生する．生成可能な粒子数が変わる s の各境界値

は，それぞれ新しい分岐切断線が始まる特異点，すなわち“分岐点”(branch point)になっている[†]．質量 m の 2 粒子の衝突において，遷移振幅 $T(s,t)$ は $s=4m^2$，$s=9m^2$ ($\lambda\varphi^3$ のように，偶数個の粒子から奇数個の粒子も生成され得るものとする)，$s=16m^2$，... の“正常閾値(しきい)”(normal threshold) において分岐点を持つ．これらの分岐点は s チャネル反応の中間状態において，質量殻上にそれぞれ 2 個，3 個，4 個の粒子が発生するようになる点である．

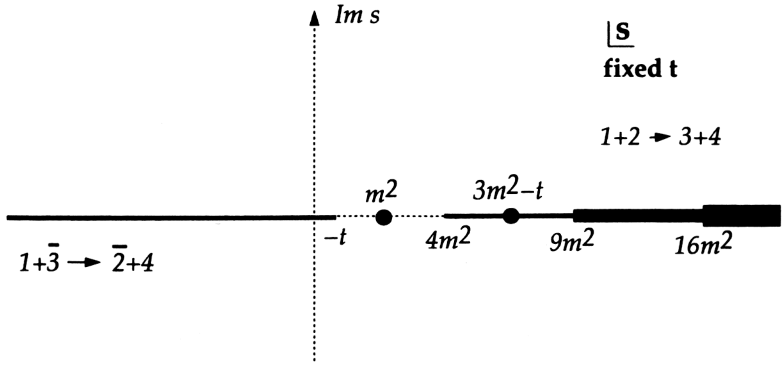


図 5.5　正常閾値切断線．

t を負の値に固定すると，s の変化に伴って u も変化する．u チャネルは $u=m^2$ において単一粒子の極の寄与を持ち，$u>4m^2$ であれば多粒子中間状態をもたらすことができる．$s+t+u=4m^2$ なので，$s=3m^2-t$ において極が現れ，$s<-t$ ならば u チャネルの切断が $\mathrm{Im}\,T$ への寄与を持つ．図において $s=-t$ と $s=4m^2$ の間の振幅は実数なので，Schwarzの鏡像原理により $T(s^*,t)=T^*(s,t)$ でなければならない．したがって T の切断線の上下の値は，互いに複素共役となる．

実際の $1+2\to3+4$ という散乱については $s>4m^2$ でなければならない．この過程の散乱振幅を求めるには，伝播関数の $i\epsilon$ を念頭に置き，無限小の虚部を持つ s のところの T の値——すなわち s の実軸の正の部分にある切断線のすぐ上の部分の振幅を評価しなければならない．$u>4m^2$ の領域は，$1+\overline{3}\to\overline{2}+4$ という反応に

[†](訳註) 複素関数の特異点は，その近傍で多価性を生じない“単純極”と，多価性を生じる“分岐点”に大別される．分岐点には有限回そのまわりを周回すると関数が元に戻るものと，何回まわっても元に戻らないものがある．“分岐切断線”は一般に分岐点同士 ($|z|=\infty$ も“点”と考える) を結ぶように設定する曲線で，その径路には任意性があるが，応用上は実軸にある分岐点と実軸上の分岐切断線が重要となる場合が多い．解析関数 $f(z)$ の実軸 $z=x$ における“飛躍”の定義は，

$$\operatorname*{disc}_{z=x} = \lim_{\varepsilon\to+0} f(x+i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to+0} f(x-i\varepsilon) = 2i\,\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0} f(x+i\varepsilon)$$

である．この飛躍がゼロでない領域が実軸上の分岐切断線になる．

対応する．上に付けた横線「$^-$」は反粒子を意味する．この場合は，物理的な振幅Tを得るために，軸の下側を見なければならない．1，2，3，4と，これらの反粒子がすべて同種粒子ならば，この過程は最初の過程と同じでなければならないので[1)]，遷移振幅に“交差対称性”(crossing symmetry) が現れる．

$$T(s+i\epsilon,t)=T(4m^2-s-t-i\epsilon,t) \tag{5.19}$$

すべてが同種粒子でない一般の反応では，u過程とs過程が異なる．たとえば$\pi^-+p\to\pi^-+p$と，その交差過程$\pi^++p\to\pi^++p$を考えると，交差関係は次のようになる．

$$T_{(\pi^+,\,p)}(s+i\epsilon,t)=T_{(\pi^-,\,p)}(2m_\pi^2+2m_p^2-s-t-i\epsilon,t) \tag{5.20}$$

更に$1+\overline{3}\to\overline{2}+4$から$\overline{3}+\overline{4}\to\overline{1}+\overline{2}$への交差関係を考えると，再び$s$面上に話が戻ることになる．したがって$1+2\to3+4$の振幅と$\overline{4}+\overline{3}\to\overline{1}+\overline{2}$の振幅は同じである．これはCPT定理の一例であるが，この定理のことを詳しく述べる余裕はない．

5.2.3 共鳴と粒子の寿命

反応前の粒子対が，中間状態において質量殻上に実粒子をひとつ生成できるエネルギーを持つ場合，その粒子は反応前の粒子へ崩壊することが常に可能であり，また更に別の粒子へと崩壊する可能性もある．したがって質量殻上の粒子の伝播関数に有限の寿命を導入しなければならず，$s=M^2$のところの遷移振幅を単純に$1/(s-M^2)$とおくことはできない．

2種類の粒子を考えることにしよう．重い方をχ (質量M)，軽い方をφ (質量m)で表す．相互作用項を$\mathcal{L}_\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\chi\varphi^2$とし，$\chi\leftrightarrow\varphi+\varphi$という過程を考える．$M^2>4m^2$であれば，中間状態として$\chi$粒子を生成することができる (図5.6)．$\chi$粒子の寿命が十分長ければ，$\chi$の生成は$\varphi\varphi$散乱の断面積における鋭いピーク，すなわち“共鳴”(resonance) となって現れる．

χ粒子の伝播関数は，軽いφ粒子のループから成る自己エネルギーによって修正を施される (図5.7)．この伝播関数のダイヤグラムを，次の級数で表すことができる．

[1)]Quod est inferius est sicut quod est superius, et quod est superius est sicut quod set inferius, ad perpetranda miracula rei unius. (Hermes Trismegistus, *The Emerald Tablet*)

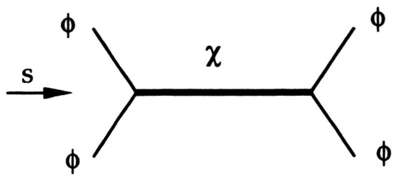


図 5.6 中間共鳴状態として現れる χ 粒子.

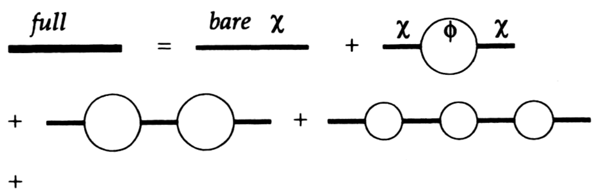


図 5.7 χ の伝播関数の級数.

$$\frac{i}{p^2 - M^2} + \frac{i}{p^2 - M^2}\left\{i\Pi(p^2)\right\}\frac{i}{p^2 - M^2} + \ldots \tag{5.21}$$

$\Pi(p^2)$ は φ 粒子の泡である.

この等比級数の総和は，次のようになる.

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon + \Pi(p^2)} \tag{5.22}$$

Π は発散する実部を持つが，これは M^2 と一緒にして χ 粒子の質量に繰り込まれるものと考え，忘れてしまえばよい. Π の虚部は有限で，次式で与えられる.

$$2\,\mathrm{Im}\,\Pi(p^2) = \theta(p^2 - 4m^2)\,\frac{1}{2}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_1}}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_2}}(2\pi)^4\delta^4(p - k_1 - k_2)|\lambda|^2 \tag{5.23}$$

λ が小さいならば虚部も小さく，χ 粒子の伝播関数 $G(p^2)$ は，M^2 の近くに極を持つ. 極の位置を見るために次のように近似する.

$$\begin{aligned} p^2 - M^2 + \Pi(p^2) &\approx p^2 - \left(M - \frac{1}{2M}\Pi(p^2)\right)^2 \\ &\approx p^2 - \left(M - \frac{1}{2M}\Pi(M^2)\right)^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

極が M から $M - i\frac{1}{2}\Gamma$ へ移動するものとすると，Γ は，

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\frac{1}{2}\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_1}}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}_2}}(2\pi)^4\delta^4(p-k_1-k_2)|\lambda|^2 \tag{5.25}$$

と書ける．これは χ 粒子の寿命の逆数に相当する．振幅 T の極は，正常閾値切断線の下の第 2 シート (second sheet) に押し込まれる†.

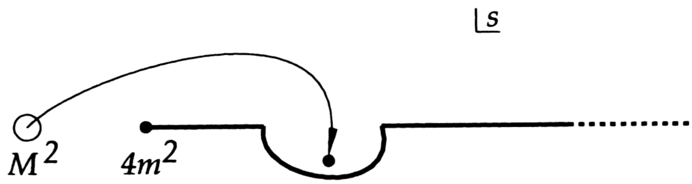


図 5.8　$M^2 < 4m^2$ の場合，極は実軸上にあり，粒子は崩壊できない．$M^2 > 4m^2$ になると，切断線の下に極が押し込まれる (極が見えるように切断線をずらして表示した).

もちろん，第 2 シートの上半面側の複素共役点にも極が生じるが，これは T を評価する部分から遠く離れているので，無視してよい (そこにたどり着くには $s = 4m^2$ の分岐点を回り込まなければならない).

極の位置を χ 粒子の固有エネルギーと見なすならば，χ 状態の時間発展は，

$$|\psi(t)|^2 \propto \left|e^{-i\left(M-i\frac{1}{2}\Gamma\right)t}\right|^2 = e^{-\Gamma t} \tag{5.26}$$

であり，質量の虚数成分は予想通り，粒子の寿命が有限であることを表す．一方 χ 粒子の伝播関数は，共鳴の近傍で近似的に，

$$G(p^2) = \frac{1}{p^2 - \left(M - i\frac{1}{2}\Gamma\right)^2} \tag{5.27}$$

と表されるので，G の虚部に比例する全断面積は，次のようになる．

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(s) \propto \frac{1}{(\sqrt{s}-M)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \tag{5.28}$$

これはピーク幅 Γ の，古典的な Breit-Wigner の Lorentz 型ピークを表している．

†(訳註) 解析関数 $f(z)$ が z 平面内に分岐点を持つ場合，その関数は多価関数である．分岐切断線以外の z 平面全域において一意的に解析関数を選んだとき，その関数に対応する z 平面 1 枚を“シート”(sheet) と呼ぶ．また分岐切断線を介して関数を解析接続させ，複数の (あるいは無数の) シートをすべてつないだ“面”全体を Riemann 面と呼ぶ.

5.3 ループのダイヤグラム

5.3.1 Wick回転

次のような積分を考える.

$$I = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 - M^2 + i\epsilon]^m} \tag{5.29}$$

積分を実行する際に，極を避けて通る積分路の手法と，被積分関数が (m が十分大きいならば) 無限遠において急速にゼロに近づくこと利用して，“Wick回転” (Wick rotation) の操作によって，エネルギー－運動量ベクトルと内積をEuclid空間に移し換えることができる. $p_0 = ip_0^{\mathrm{E}}$ と置き，p_0^{E} の積分範囲を $-\infty$ から $+\infty$ までとして積分を実行する.

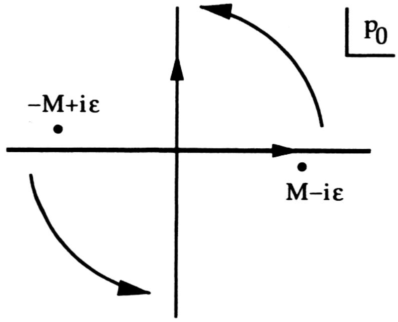


図 5.9　p_0 の積分路を 90° 変えても積分値は変わらない.

Wick回転の結果，積分は次のようになる.

$$I = i(-1)^m \int \frac{d^d p^{\mathrm{E}}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + M^2]^m} \tag{5.30}$$

こうすると，すべてがEuclid計量で扱える.

この巧妙な手法は $2m > d$ の場合だけに正当なものであるが，通常は $2m < d$ で積分が発散する条件においても，このような手法が必要になる. 後からこの種の誤魔化しを正当化するための物理的な議論を行う.

Ouroborosのグラフ

Wick回転の興味深い応用のひとつは，自由場における真空エネルギー密度の計算である. これは摂動論を用いて，質量の自乗を m^2 から $m^2 + \delta m^2$ へ仮想的に変

更することに伴うエネルギーの変化から求めることができる．この場合，摂動は2次の $\mathcal{H}_\mathrm{I} = \frac{1}{2}\delta m^2$ であり，閉じた形の真空グラフを足し合わせればよい．$\mathcal{H}_\mathrm{I}$ を n 回挿入したときの $iW = -(\mathrm{Vol})(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$ への寄与は，次式で与えられる．

$$(\mathrm{Vol})\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2n}\left((-i\delta m^2)\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\right)^n \tag{5.31}$$

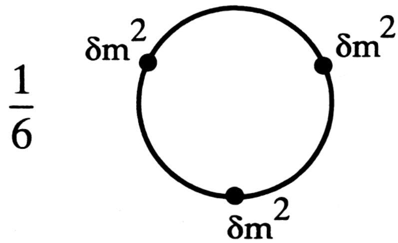


図 5.10　iW への3次の寄与．

n 重の巡回対称性と，円周を周回する2つの方向によって対称性因子 $1/(2n)$ が現れる (荷電粒子を扱う場合は各線が方向を持ち，因子 $1/2$ が不要になる)．

Wick回転の結果，エネルギーの変化は次のように表される．

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -\sum_n (-1)^n \frac{1}{2n}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\delta m^2}{k^2 + m^2}\right)^n \tag{5.32}$$

ここで，

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{5.33}$$

の関係を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\left(1 + \frac{\delta m^2}{k^2 + m^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\ln\big(k^2 + (m^2 + \delta m^2)\big) - \ln(k^2 + m^2)\Big)\end{aligned} \tag{5.34}$$

式(5.34)から，自由場の基底エネルギー密度は，

$$\mathcal{E}(m^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln(k^2 + m^2) \tag{5.35}$$

であると解釈できる．$k^2 + m^2$ の対数は，始点も終点もない"自分の尾に噛みついた伝播関数"を表すものと考えられる．私はこのダイヤグラムを，"tail eater"

を意味するギリシャ語に因んで" Ouroborosダイヤグラム "と呼ぶことにしたい. Ouroborosは自分自身の尾に噛みついている蛇として描かれ，果てしない生死の繰り返しを表象する．これは無限大の記号 ∞ の由来でもあり，何もないところから粒子ー反粒子対が現れては，再結合によって消滅することを繰り返している真空過程の寄与を表すのにふさわしい名称である．

Ouroborosダイヤグラムが，通常のゼロ点エネルギーの表式を与えることを見るために，$\mathcal{E}(m^2)$ を m^2 で微分してみる．

$$\frac{\partial\mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+m^2} \tag{5.36}$$

k_0 の積分を実行すると，次のようになる．

$$\frac{\partial\mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \tag{5.37}$$

再び積分を施すと，m に依存しない定数項を除き，

$$\mathcal{E}(m^2)=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2} \tag{5.38}$$

となる．真空エネルギーは予想通り，各モードの $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の総和になる．荷電粒子の場については上記の2倍の結果が得られるが，これは2種類の粒子が存在することに対応している．

5.3.2 Feynmanのパラメーター積分公式

Feynman積分を計算する際に有用な恒等式がいくつかある．そのひとつはSchwinger[2)]の技法 (Schwinger's trick) と呼ばれるもので，一般には次のように書かれる．

$$a_1^{-n_1}a_2^{-n_2}\dots a_m^{-n_m}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n_i)}\int_0^\infty dt_1dt_2\dots dt_m t_1^{n_1-1}\dots t_m^{n_m-1}e^{-ta_1\dots-ta_m} \tag{5.39}$$

適当な変数の変更によって，これを更に一般的な" Feynmanの技法 " (Feynman's trick) に変換することができる．$t_i=\alpha_i t$ のようにパラメーター α_i を導入する．

2) Julian Seymour Schwinger：1918年2月12日 New York (ニューヨーク州) 生まれ．1994年7月16日 Los Angeles (カリフォルニア州) にて死去．1965年ノーベル物理学賞．

$0<\alpha_i<1$，$0<t<\infty$ とし，$\sum_i \alpha_i = 1$ の条件を課すためにデルタ関数を用いる(各 α を方向余弦の自乗と考えることができる)．式(5.39)は，次式のようになる．

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n_i)}\int_0^\infty dt \int d[\alpha]\,\delta\Big(\sum \alpha_i - 1\Big)\, t^{\sum n_i - 1} e^{-t(\sum \alpha_i a_i)}\left(\alpha_1^{n_1-1}\ldots\alpha_m^{n_m-1}\right) \quad (5.40)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum n_i\right)}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n_i)}\int d[\alpha]\,\delta\Big(\sum \alpha_i - 1\Big)\frac{\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{n_i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i\right)^{\sum n_i}} \quad (5.41)$$

5.3.3 次元正則化

式(5.41)の例として，$a_1=a_2=1$，$n_1=x$，$n_2=y$ の場合を見てみる．

$$1 = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}\int d\alpha\, \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1} \quad (5.42)$$

これは Euler のベータ関数 (B 関数†) に関する恒等式としてよく知られている．

この式を，次の積分に適用してみよう．

$$I = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p+k)^2+m^2}\frac{1}{p^2+m^2} \quad (5.43)$$

分母に $i\epsilon$ が無いのは，すでに Wick 回転によって Euclid 領域への移行を済ませているからである．ここでは，すべての内積を通常の内積 (Lorentz 内積ではない) として扱う．積分は k^2 だけの関数なので，k^2 の値を解析的に正 (Euclid 空間) から負 (Minkowski 空間) へ移行させることで，物理的な Minkowski 空間の運動量に戻すことができる．

Feynman の積分公式，

$$\frac{1}{xy} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big)^2} \quad (5.44)$$

を適用すると，上記の積分は次のようになる．

$$I = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left[\alpha(p^2+2pk+k^2)+m^2+(1-\alpha)p^2\right]^2} \quad (5.45)$$

---

†(訳註) $B(x,y) \equiv \int_0^1 d\alpha \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}$.

この積分は発散する．有限な結果を導くために，'t Hooft と Veltman の“次元正則化”(dimensional regularization) の技法を適用し，d 次元の積分を評価する．d は必ずしも整数とは限らない‡．基本となる恒等式は，次の積分について与えられる．

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + 2pk + M^2]^m} \tag{5.46}$$

まず d を整数と考えて，積分を評価する．

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dt \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\, t^{m-1} e^{-t(p^2+2pk+M^2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(m) 2^d \pi^{d/2}} \int_0^\infty dt\, t^{m-d/2-1} e^{-t(M^2-k^2)} \\
&= \frac{\Gamma(m-d/2)}{\Gamma(m)} \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \left(M^2 - k^2\right)^{d/2-m}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

元の式(5.46)は，$d > 2m$ の場合に発散する．この発散は，因子 $\Gamma(m - d/2)$ によって表されている．ガンマ関数は，引き数がゼロおよび負の整数のところで極を持つ．我々は式(5.47)を d の解析関数と見なして，極と有限な領域を明示してみる．

ここで扱う例は，$d \to 4$，$m = 2$，“k” $= \alpha k$，$M^2 = m^2 + \alpha k^2$ であり，積分は次のようになる．

$$I = \lim_{d\to 4} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 d\alpha \left(m^2 + \alpha k^2 - \alpha^2 k^2\right)^{d/2-2} \tag{5.48}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{2 - \dfrac{d}{2}} - \int_0^1 d\alpha \ln\left(m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2\right) + \text{finite} \right\} \tag{5.49}$$

この表式から何が分かるであろうか？ 我々は後から，極の部分を結合の繰り込みとして吸収する方法を見いだす．積分は有限で初等的なものであるが，積分自体を評価することは，あまり教育的ではないだろう．その代わりに一般論を適用して，k^2 に関する解析的な振舞いを調べてみよう．

$m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2$ をゼロにする根は，

$$\alpha_\pm = \frac{+k^2 \pm \sqrt{(k^2)^2 + 4m^2k^2}}{2k^2}$$

‡(訳註)“繰り込み”というのは紫外成分 (運動量の大きな成分) による積分の発散を適正な形で抑制する処方のことであるが，数学的に不定な発散積分に対して直接紫外成分の処理を施すことはできないので，(1) まず何らかの恣意的な，必ずしも物理的な意味を伴わない正則化処理によって一時的に積分の発散を抑える，(2) 紫外成分を“繰り込む”処方を施す，(3) はじめに行った恣意的な正則化処理を解除する，という手順が取られる．正則化処理として用いられる有力な方法のひとつが次元正則化であり，次元を仮想的に $4 \to (4-\epsilon)$ のように整数からずらすことで，積分の発散が抑えられる (第18章，付録C)．正則化の方法としては，次元正則化の他に，時空の離散化 (格子正則化．第15章および p.237 訳註参照) やレギュレーター (regulator：紫外部分を解析的に“切断”するための仮想的な負計量粒子場) の挿入などの手段により，切断パラメーターを導入する方法 (17.2-3節) もある．

$$= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4m^2/k^2}\right) \tag{5.50}$$

で，これらの点が，対数関数の特異点になる．

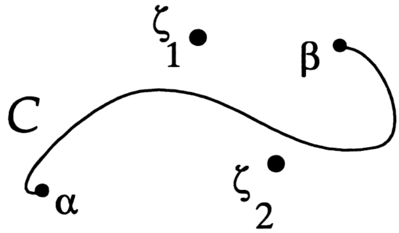


図 5.11　関数 $F(a)$ を決める積分路．$f(z,a)$ の 2 つの極 $\zeta_{1,2}$ の位置は a に依存する．

これらの特異点は，振幅にどのように影響するであろうか？ 複素平面における積分で定義される関数と，特異点の関係を思い起こそう．関数，

$$F(a) = \int_{\alpha}^{\beta} dz f(z,a) \tag{5.51}$$

が，図 5.11 に示すような積分路で定義されているものとする．a を変えると，極 $\zeta_{1,2}$ は複素 z 平面上の位置を変える．一方の極が積分路に重なると，被積分関数 $f(z,a)$ はその点で不定となるが，積分路をずらすことができるならば，$F(a)$ を決めるのに不都合は生じない．Cauchyの定理によれば，積分路の変更によって，$F(a)$ の値を変更することなく被積分関数 $f(a,z)$ を有限にできる．問題となるのは積分路をずらすことができない場合で，このとき $F(a)$ に特異点が発生する．このような状況は，極の一方が固定された積分路の端 α か β に重なる場合，もしくは 2 つの極が互いに接近して積分路を挟み込んでしまう場合に生じる．前者の状況は“端点特異性”(endpoint singularity)，後者は“締めつけ特異性”(pinch singularity) を生じる．たとえばLegendre関数，

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+1}} dt, \quad \mathrm{Re}(n+1) > 0 \tag{5.52}$$

は $z = \pm 1$ において特異点を持つが，これは被積分関数の $t = z$ における特異点が，積分路の端に重なるからである．

我々が扱う Feynman積分では，対数関数の分岐点 $\alpha_\pm$ が，$k^2 = -4m^2$ において Minkowski領域の α の積分路を挟み込んでしまう．したがって泡のダイヤグラムは，まさに特異性を持つべき点での特異性を備えている．

次元正則化の性質に関する議論と，d 次元の実空間の伝播関数を，付録 C に与えておく．

第 6 章　形式的展開

この章では形式論を扱う．一般化したGreen関数を導入し，それを摂動論的に評価する方法を示す．更に摂動論には依存しない一般的な性質を調べ，そこからS行列を導く方法を与える．

6.1　Gell-Mann Lowの定理

散乱断面積や粒子の寿命の計算以外で，しばしば必要となるのは，演算子積の行列要素の計算である．散乱実験を適当な制御の下に行うことができるならば，このような行列要素は，実験的に決めることができる量となる．例えば電子がハドロン(hadron†) に散乱されるときに仮想光子を放出するといった量子電磁力学的な過程は十分に理解されているので，光子をハドロン状態に関する次のような量を調べるためのプローブと見なすことができる．

$$\langle N|\,T\big\{J^{\mu}(x)J^{\nu}(y)\big\}|N\rangle \tag{6.1}$$

$|N\rangle$ はハドロンの基底状態で，J^{μ} は電磁カレントである．このような量を評価する便法として“ Gell-Mann Lowの定理 ”がある．

Heisenberg場の時間発展が，次のように表されることを思い起こそう．

$$\varphi_{\rm H}(x,t) = e^{iHt}\varphi_{\rm S}(x)e^{-iHt} \tag{6.2}$$

また，相互作用表示における場の時間発展は，次式で表される．

$$\varphi_{\rm I}(x,t) = e^{iH_0t}\varphi_{\rm S}(x)e^{-iH_0t} \tag{6.3}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\varphi_{\rm H}(x,t) &= e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi_{\rm I}(x,t)e^{iH_0t}e^{-iHt}\\ &= U^{\dagger}(t,0)\varphi_{\rm I}(x,t)U(t,0)\end{aligned} \tag{6.4}$$

†(訳註) 強い相互作用をする，中間子とバリオン (baryon：重粒子) の総称．

である．$U^\dagger(t,0)=U(0,t)$ なので，次のように書き直せる．

$$\varphi_{\rm H}(x,t)=U(0,t)\varphi_{\rm I}(x,t)U(t,0) \tag{6.5}$$

この恒等式を，一般化したGreen関数†，もしくは“相関関数”の計算に利用する．この関数は，次のような行列要素で表される．

$$G(x_1,\ldots,x_n)=\langle 0|\,T\{\varphi_{\rm H}(x_1)\ldots\varphi_{\rm H}(x_n)\}|0\rangle \tag{6.6}$$

$|0\rangle$ は相互作用を持つ系の真の基底状態である．初めから計算できるのは，H_0 の基底状態である $|0\rangle_0$ を用いた，

$$G_0(x_1,\ldots,x_n)={}_0\langle 0|\,T\{\varphi_{\rm I}(x_1)\ldots\varphi_{\rm I}(x_n)\}|0\rangle_0 \tag{6.7}$$

である．

相互作用を持たない真空系に断熱的に相互作用を導入して，真の基底状態 $|0\rangle$ へと時間発展させることを考える．$H=H_0+\epsilon(t)V$ とおき，$t=-\infty$ では $\epsilon=0$，$t=0$ では $\epsilon=1$ とする．そうすると，

$$|0\rangle=U(0,-\infty)|0\rangle_0\ (\times\text{phase}) \tag{6.8}$$

と書ける．同様に $t=\infty$ でも ϵ をゼロにして相互作用の“スイッチオフ”を行うと，系は $|0\rangle_0$ に戻るはずである．

$$|0\rangle_0\propto U(+\infty,0)|0\rangle=U^\dagger(0,+\infty)|0\rangle \tag{6.9}$$

すなわち，

$$|0\rangle=U(0,+\infty)|0\rangle_0\ (\times\text{phase}') \tag{6.10}$$

であり，両辺の共役をとると，次のようになる．

$$\langle 0|={}_0\langle 0|U(+\infty,0)\ (\times\text{phase}') \tag{6.11}$$

式(6.8)と(6.10)にある (×phase) のどちらか一方は $|0\rangle$ の定義に吸収させてしまうことができるが，両者を同時に消去することはできない．この位相因子が残ることは念頭に置いておく必要がある．

次のように定義した“Møllerの波動演算子”(Møller wave operator) が用いられる場合もある．

$$\Omega^{(\pm)}=U(0,\pm\infty) \tag{6.12}$$

†(訳註)“n 点Green関数”と呼ぶ場合もある．

位相因子を除いて，次式を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T\{\varphi_{\rm H}(x_1)\ldots\varphi_{\rm H}(x_n)\}|0\rangle(\times\text{phase})\\
&= {}_0\langle 0|U(\infty,0)U(0,t_{\rm last})\varphi_{\rm I}(t_{\rm last})U(t_{\rm last},0)U(0,t_{\rm next})\varphi_{\rm I}(t_{\rm next})\ldots U(0,-\infty)|0\rangle_0\\
&= {}_0\langle 0|U(\infty,t_{\rm last})\varphi_{\rm I}(t_{\rm last})U(t_{\rm last},t_{\rm next})\varphi_{\rm I}(t_{\rm next})\ldots U(t_{\rm first},-\infty)|0\rangle_0\\
&= {}_0\langle 0|T\left\{\varphi_{\rm I}(x_1)\ldots\varphi_{\rm I}(x_n)\,e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}H_{\rm I}(t)dt}\right\}|0\rangle_0 \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

“first”“last”などの添字は，時刻 x_i^0 の順序を表す．firstが一番早い時刻，lastは一番遅い時刻である．

位相因子は一連の φ だけを省いた同様の式による除算を行い，取り除くことができる．

これで次の定理が証明された．

定理：
$$
\langle 0|T\{\varphi_{\rm H}(x_1)\ldots\varphi_{\rm H}(x_n)\}|0\rangle=\frac{{}_0\langle 0|T\left\{\varphi_{\rm I}(x_1)\ldots\varphi_{\rm I}(x_n)\,e^{-i\int H_{\rm I}(t)dt}\right\}|0\rangle_0}{{}_0\langle 0|T\left\{e^{-i\int H_{\rm I}(t)dt}\right\}|0\rangle_0} \qquad (6.14)
$$

注意：分子の展開の仕方は明らかである．指数関数を級数展開して，各項を初めの演算子積と掛け合わせ，各項の演算子をすべて時間順序化する．分母を別途計算して除算をする代わりに，分子の計算を，あらかじめ真空泡の成分を省いて実施すればよい．

一例として，$\lambda\varphi^3$ 理論における“衣をまとった”(dressed) φ の伝播関数 $\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle$ は，図 6.1 のように与えられる．

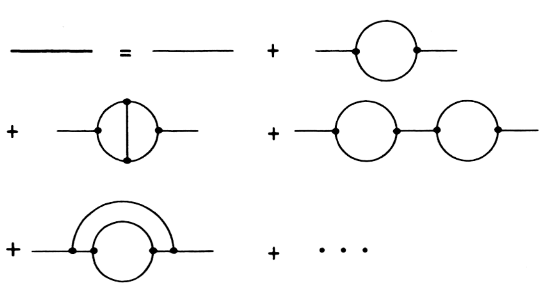


図 6.1　φ の伝播関数に寄与するダイヤグラム．

6.2 Lehmann-Källénスペクトル表示

$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = iG(x,y)$ とおく．これを，

$$iG(x,y) = \theta(x^0 - y^0)\sum_{p,\alpha}\langle 0|\varphi(x)|p,\alpha\rangle\langle p,\alpha|\varphi(y)|0\rangle + (x \leftrightarrow y) \tag{6.15}$$

と表すことができる．p，α は中間状態を識別するパラメーターである．相互作用がある場合，中間状態は1粒子状態だけに限定されず，量子数 α，4元運動量 p を持つ一般の多粒子状態も中間状態となる．$\varphi(x)$ は，

$$\varphi(x) = e^{iPx}\varphi(0)e^{-iPx} \tag{6.16}$$

と表されるので，

$$\langle p,\alpha|\varphi(x)|0\rangle = \text{c-number } e^{ipx} \tag{6.17}$$

である．ここで次の関数を定義する．

$$2\pi\rho(p) = \sum_{\alpha}\left|\langle 0|\varphi(0)|p,\alpha\rangle\right|^2 \tag{6.18}$$

これはLorentz不変性と物理状態のエネルギーの正値性により，

$$2\pi\rho = 2\pi\theta(p^0)\rho(p^2) \tag{6.19}$$

と表されるはずである．

そうすると，$iG(x,y)$ を次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} iG(x,y) &= \theta(x^0 - y^0)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}2\pi\theta(p^0)\rho(p^2)e^{-ip(x-y)} + (x \leftrightarrow y) \\ &= \int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\left\{\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)e^{-ip(x-y)} + (x \leftrightarrow y)\right\} \\ &= i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)G_0(x,y;m^2) \end{aligned} \tag{6.20}$$

式中の $G_0(x,y;m^2)$ は，質量 m の自由粒子の伝播関数である．

全く同様の方法で，次式を証明することもできる．

$$\langle 0|\left[\varphi(x),\varphi(y)\right]|0\rangle = \int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\Delta_0(x,y;m^2) \tag{6.21}$$

$\Delta_0(x,y;m^2)$ は，質量 m の自由場の交換子であり，$\rho(m^2)$ は式(6.20)のそれと同じものである．この式は“スペクトル関数”$\rho(m^2)$ に関する重要な“和則”(sum rule)

を与える．等時刻面で両辺を比較し，自由場についても相互作用を持つ場についても，

$$\partial_{y^0}\Delta(x,y) = \left[\varphi(\mathbf{x},t), \partial_{y^0}\varphi(\mathbf{y},t)\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{6.22}$$

であることを利用すると，次の和則が見いだされる．

$$1 = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \tag{6.23}$$

$\rho(m^2)$ は，確定した質量 m を持つ単一の φ 粒子状態からの寄与と，連続した不変質量を持つ多粒子状態からの寄与を含む．ここで φ 粒子と φ 場が結合する度合を表す“波動関数の繰り込み定数”(wave-function renormalization constant) Z を，次のように導入する．

$$\langle p|\varphi(x)|0\rangle = \sqrt{Z}e^{ipx} \tag{6.24}$$

そうすると，スペクトル関数は，次のように書けるものと予想される．

$$\rho(m^2) = Z\delta(m^2 - m_\varphi^2) + \sigma(m^2) \tag{6.25}$$

$\sigma(m^2)$ は多粒子中間状態からの寄与で，($\lambda\varphi^3$ 理論では) $4m_\varphi^2$ 以上でだけ寄与を持ち得る．したがって，和則を次のように書き直すこともできる．

$$1 = Z + \int_{4m_\varphi^2}^\infty dm^2 \sigma(m^2) \tag{6.26}$$

一般に $\sigma(m^2) \geq 0$ なので (等号が成立するのは自由場だけである)，繰り込み定数には $Z \leq 1$ という制約がある．

したがって伝播関数を，次のように書くことができる．

$$G(p) = \frac{Z}{p^2 - m_\varphi^2} + \int_{4m_\varphi^2}^\infty dm^2 \sigma(m^2) \frac{1}{p^2 - m^2} \tag{6.27}$$

式(6.27)は“分散関係”を表す式で，極と分岐切断線をあらわに示している．

複素関数論によると，解析的な関数はCauchyの定理を用いて，次のように表されることを思い出そう．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \tag{6.28}$$

関数 $f(z)$ が，a から ∞ への分岐切断線を除く実軸上で実数値を与え，また $|z| \to \infty$ において関数が十分速くゼロに近づいて，積分路の周回円の部分を無視できるならば，$f(z)$ は次のように書ける．

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{\mathrm{Im} f(s)}{s - z} ds \tag{6.29}$$

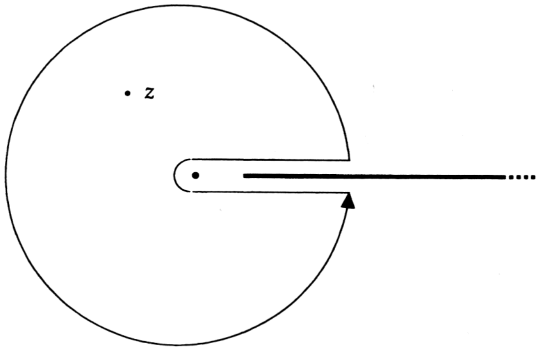


図 6.2　分散関係に対する積分路

したがって，$\rho(m^2)$ は $\mathrm{Im}G/\pi$ に等しい．

余談として，ρ の和則が，量子力学における和則を一般化したものであることを指摘しておこう．単位質量を持つ固有振動数 Ω の調和振動子において，伝播関数に類似した $iG_0(t) = \langle 0|\,T\{x(t)x(0)\}|0\rangle$ を，簡単に計算できる．

$$\langle 0|\,T\{x(t)x(0)\}|0\rangle = \frac{e^{-i\Omega|t|}}{2\Omega} \tag{6.30}$$

1 自由度を持つ一般の系に対して，同じ量を考えてみよう．

$$\begin{aligned}\langle 0|\,T\{x(t)x(0)\}|0\rangle &= \sum_n \left|\langle 0|x(0)|n\rangle\right|^2 e^{-i(E_n - E_0)|t|} \\ &= \int dE \Big\{ \sum_n \delta\big(E - (E_n - E_0)\big) 2E \left|\langle 0|x(0)|n\rangle\right|^2 \Big\} \frac{e^{-iE|t|}}{2E} \\ &= \int dE \rho(E) iG_0(t, E) \end{aligned} \tag{6.31}$$

ここに出てくる ρ は，

$$\rho(E) = \sum_n \delta\big(E - (E_n - E_0)\big) 2E \left|\langle 0|x(0)|n\rangle\right|^2 \tag{6.32}$$

である．ここから次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\int dE \rho(E) &= \sum_n 2(E_n - E_0) \left|\langle 0|x(0)|n\rangle\right|^2 \\ &= \langle 0|\big[x, [H, x]\big]|0\rangle \\ &= \langle 0|[x, -ip]|0\rangle \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6.33}$$

この $\sum_n 2(E_n - E_0)|\langle 0|x(0)|n\rangle|^2$ の和則は原子物理学において Thomas-Reiche-Kuhn の和則，固体物理学において f 値の総和則 (f-sum rule) と呼ばれている．

6.3 LSZ簡約公式

6.3.1 外線の処理

6.1 節の相関関数，

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0|\, T\bigl\{\varphi_{\mathrm{H}}(x_1)\ldots\varphi_{\mathrm{H}}(x_n)\bigr\}|0\rangle \tag{6.34}$$

の運動量空間における Feynman ダイヤグラムの展開は，S 行列のダイヤグラム展開とよく似ている．主な違いは，相関関数では，

- 外線の運動量が必ずしも質量殻上にない．
- 外線も伝播関数を表しており，S 行列では省いた外線の自己エネルギーを含んでいる．

という点である．これらの違いを踏まえて相関関数から外線の寄与を除き，運動量を質量殻上に設定することで，S 行列を導くことができる．次の相関関数，

$$\langle 0|\, T\bigl\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_m)\bigr\}|0\rangle \tag{6.35}$$

において，一連の変数 y は質量殻近傍にある入射粒子の変数，x は質量殻近傍にある放出粒子の変数とする．質量殻近傍の運動量については，外線の伝播関数の極のところが主な寄与を持ち，次の近似が成立するはずである†．

$$\begin{aligned}&\int d^4[x]d^4[y]\, e^{-ip_ix_i+ik_jy_j}\langle 0|\, T\bigl\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_m)\bigr\}|0\rangle \\ &\approx \prod_i \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2}\prod_j \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2}\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m\rangle\end{aligned} \tag{6.36}$$

これを踏まえて次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1, \ldots \mathbf{k}_m\rangle \\ &= \frac{i^{(n+m)}}{\bigl(\sqrt{Z}\bigr)^{(n+m)}}\int d^4[x]d^4[y]\, e^{-ip_ix_i+ik_jy_j}\prod_i\bigl(\partial_{x_i}^2 + m^2\bigr)\prod_j\bigl(\partial_{y_j}^2 + m^2\bigr) \\ &\qquad \times \langle 0|\, T\bigl\{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_m)\bigr\}|0\rangle\end{aligned} \tag{6.37}$$

---

†(訳註) $\int d^4[x]$ は $\int\!\!\int\!\cdots\!\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n$ を意味する．また Einstein の規約により $e^{-ip_ix_i} = e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}\ldots e^{-ip_nx_n}$ であることに注意されたい．

式(6.37)において，私は入射状態と放出状態が，ただ単一の直線的な伝播関数として繋がっていないことを暗黙のうちに仮定した．したがって，ここでは初期状態と終状態におけるそれぞれの運動量が，すべて異なっているS行列の行列要素だけを対象としている．

式(6.37)はLSZ簡約公式(Lehmann-Symanzik-Zimmermann reduction formula)と呼ばれる．私はこれを“導出”するにあたり，波束に関する微妙な問題や，漸近粒子を明快に分離する必要性の議論を省いた．Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*において，この問題に関する良質の解説を見ることができる．議論の概要を次節で示すことにする．

6.3.2 入射状態・放出状態

LSZの定式化を詳述するつもりはないが，要点がいくつかある．第1の要点は入射状態・放出状態(*in* and *out* states)と入射場・放出場(*in* and *out* fields)の概念である．これらは相互作用の断熱的なスイッチオンとスイッチオフを避けるために導入されるものである．

Heisenberg描像では状態が時間発展しないが，これは何も起こらないことを意味するものではない．遠い過去における状態が $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ の運動量[1]を持つ n 個のよく分離した粒子を含む状態 $|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{in}\rangle$ であったとしても，遠い未来における状態が全く同じ粒子の状態で記述できるわけではない．反応後の状態は運動量が $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ の分離した粒子を含む状態 $|\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m; \mathrm{out}\rangle$ の1次結合でよく記述することができる．一般に単純な入射状態を，単純な各放出状態によって展開することができる．

$$|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{in}\rangle = \sum_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m; \mathrm{out}\rangle S_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m;\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n} \tag{6.38}$$

$S_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m;\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}$ はS行列の要素である．このことは次のようにも書ける．

$$S_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m;\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n} = \langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m; \mathrm{out}|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{in}\rangle \tag{6.39}$$

これと等価な表現として，行列要素 $S_{\mathbf{k};\mathbf{p}}$ ($\mathbf{k}$，$\mathbf{p}$ は粒子の運動量一式を表すものとする)を持つ演算子 S が次のように作用すると言うこともできる．

$$S|\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{out}\rangle = |\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{in}\rangle \tag{6.40}$$

[1] 厳密には，これらの運動量に近い運動量で構成された波束を用いなければならない．真の平面波同士を空間的に分離することはできない．

ここで $|\mathbf{k};\mathrm{in}\rangle = S|\mathbf{k};\mathrm{out}\rangle$ は,

$$\langle \mathbf{k};\mathrm{out}|S^\dagger = \langle \mathbf{k};\mathrm{in}| \tag{6.41}$$

と等価なので，次式が得られる.

$$S_{\mathbf{k};\mathbf{p}} = \langle \mathbf{k};\mathrm{out}|S|\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle = \langle \mathbf{k};\mathrm{in}|S|\mathbf{p};\mathrm{in}\rangle \tag{6.42}$$

束縛状態が無いものとすると，$|\mathbf{k};\mathrm{in}\rangle$ も $|\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle$ も Hilbert空間の基底を構成できる．両者に共通なのは真空状態と 1 粒子状態だけである (遠い過去において運動量 $\mathbf{k}$ を持っていた定常的な 1 粒子は，その後もずっと運動量 $\mathbf{k}$ を保つはずである)．入射状態と放出状態は，自由粒子の Fock空間内の状態として同じラベルと内積を持つので，$\hat{a}_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$ と $\hat{a}_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ およびこれらの共役演算子を定義して，真空状態 $|0\rangle$ に生成演算子を施すことにより，入射基底状態と放出基底状態を作れる.

$$|\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;\mathrm{out}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_1)\ldots\hat{a}^\dagger_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_n)|0\rangle \tag{6.43}$$

入射・放出の生成消滅演算子は S 行列によって関係付けられる．たとえば $\hat{a}^\dagger_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}) = S\hat{a}^\dagger_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})S^{-1}$ である.

$\hat{a}_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$，$\hat{a}_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ などを用いて入射場 $\varphi_{\mathrm{in}}(x)$ と放出場 $\varphi_{\mathrm{out}}(x)$ を作ることもできる†．これらは正準交換関係を満たす.

$$\delta(x_0 - x_0')\left[\varphi_{\mathrm{in}}(x), \partial_0\varphi_{\mathrm{in}}(x')\right] = i\delta^4(x - x') \tag{6.44}$$

LSZ形式を導くために，入射場と放出場の間をある意味で“補間”するような Heisenberg場 $\tilde{\varphi}(x)$ の存在を仮定する.

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{\varphi}(x) = \varphi_{\mathrm{out}}(x), \qquad \lim_{t\to-\infty}\tilde{\varphi}(x) = \varphi_{\mathrm{in}}(x) \tag{6.45}$$

この極限操作の解釈には注意が必要である．これは規格化可能な状態間の行列要素の極限値という意味でのみ正しい.

$$\lim_{t\to\infty}\langle\Phi|\tilde{\varphi}(x)|\Psi\rangle = \langle\Phi|\varphi_{\mathrm{out}}(x)|\Psi\rangle \tag{6.46}$$

これは規格化可能な状態だけが，よく分離された波束の状態に対応するからである．この弱位相的な演算子の収束は，積の極限値と極限値の積が等しいことを保証しない．したがって交換子の極限と極限の交換子は一般に異なる.

$$\lim_{t\to\infty}\langle\Phi|\left[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(x')\right]|\Psi\rangle \neq \langle\Phi|\left[\varphi_{\mathrm{out}}(x), \varphi_{\mathrm{out}}(x')\right]|\Psi\rangle \tag{6.47}$$

†(訳註) 入射場と放出場をまとめて“漸近場”(asymptotic field) と呼ぶことが多い.

したがって，$\tilde{\varphi}(x)$ に正準交換関係を想定することはできない．

我々は $\varphi(x)$ を $\tilde{\varphi}(x)$ にスカラーを掛けたものとおきたいので，その意味で上記の式は好都合である．Lehmann-Källén の和則を導くために用いた Heisenberg 場 $\varphi(x)$ と，入射・放出場 $\varphi_{\rm in/out}$ は，どちらも正準交換関係を満足する．他方 $\varphi(x)$ は，

$$\langle p|\varphi(x)|0\rangle = \sqrt{Z}e^{ipx} \tag{6.48}$$

を満たし，$\varphi_{\rm in}(x)$ は，

$$\langle p|\varphi_{\rm in}(x)|0\rangle = e^{ipx} \tag{6.49}$$

を満たす．したがって，次のように同定しなければならない．

$$\varphi(x) = \sqrt{Z}\tilde{\varphi}(x) \tag{6.50}$$

“仮に”極限操作 $\tilde{\varphi}(x) \to \varphi_{\rm in/out}(x)$ と演算子の掛け算が，入れ替え可能であるとすると，式(6.47)に関する矛盾が生じる．

$\tilde{\varphi}(x)$ を“繰り込まれた場‡”(renormalized field)，$\varphi(x)$ を“裸の場”(bare field) と呼ぶ．通常 $\sqrt{Z}$ は発散する式で与えられ，切断 (cut-off) に依存するので，物理量を計算するには $\tilde{\varphi}(x)$ を用いる必要がある．式(6.37)の $\sqrt{Z}$ は，この変換を可能にする．

以上の前置きを踏まえ，Hermite な (実場の) KG 場を扱う LSZ 形式を記述する．式(2.30)の関係，

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = (e^{-ikx}, \varphi), \quad \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = (\varphi, e^{-ikx}) \tag{6.51}$$

を思い起こそう．括弧は KG の内積を表す．ここで KG 方程式の平面波解 e^{-ikx} を，運動量が $\mathbf{k}$ 付近に分布する規格化可能な波束解 $f_{\mathbf{k}}(x)$ に置き換えることができるものと考える．この波束は空間内で十分な広がりを持ち，波束 $\mathbf{k}$ を持つ平面波に近いものであるが，規格化可能である．

これを念頭において，S 行列の要素を考える．

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= \langle \mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{out}|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathrm{in}\rangle \\ &= \langle \mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{out}|\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\mathbf{k}_1)|\mathbf{k}_2;\mathrm{in}\rangle \end{aligned} \tag{6.52}$$

極限操作，

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(x) = \sqrt{Z}\varphi_{\rm in}(x) \tag{6.53}$$

‡(訳註) 各粒子が周囲にまとっている自己場との相互作用を繰り込んである場，という意味である．$t \to \pm\infty$ では互いに粒子が離れていて，粒子間の相互作用が無視できるので，自己場の効果をあらかじめ繰り込んだ $\tilde{\varphi}$ は，この極限で自由場と見なせる．

によって，$\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\mathbf{k}_1)$ は $\lim_{t\to-\infty} a^\dagger(\mathbf{k}_1,t)$ に置き換わる．

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1,t)=\frac{i}{\sqrt{Z}}\int_{x_0=t}\Big(\varphi(x)\partial_0 f_{\mathbf{k}_1}(x)-\big(\partial_0\varphi(x)\big)f_{\mathbf{k}_1}(x)\Big)d^3x \tag{6.54}$$

である．ここで 4 次元における Greenの恒等式を考えよう．

$$\begin{aligned}&i\int d^4x\Big(\varphi(\partial^2+m^2)f_{\mathbf{k}_1}-\big((\partial^2+m^2)\varphi\big)f_{\mathbf{k}_1}\Big)\\&\quad=i\int_{x_0=+\infty}(\varphi\,\partial_0 f_{\mathbf{k}_1}-(\partial_0\varphi)f_{\mathbf{k}_1})d^3x-i\int_{x_0=-\infty}(\varphi\,\partial_0 f_{\mathbf{k}_1}-(\partial_0\varphi)f_{\mathbf{k}_1})\,d^3x\end{aligned} \tag{6.55}$$

[$f_{\mathbf{k}_1}(x)$ が規格化可能なので，空間次元における部分積分が許容される．] $\mathbf{k}_1$ が $\mathbf{p}_1$ および $\mathbf{p}_2$ と異なるものとし，式(6.55)と $f_{\mathbf{k}_1}(x)$ がKG方程式に従うことを用いると，次式が得られる．

$$\langle\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{out}|a^\dagger_{\rm in}(\mathbf{k}_1)|\mathbf{k}_2;\mathrm{in}\rangle=\frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4x\,f_{\mathbf{k}_1}(\partial^2+m^2)\langle\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{out}|\varphi(x)|\mathbf{k}_2;\mathrm{in}\rangle \tag{6.56}$$

$\mathbf{k}_1$，$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$ の条件によって，$t=+\infty$ の項から生成する $\hat{a}^\dagger_{\rm out}(\mathbf{k}_1)$ は，$\langle\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2;\mathrm{out}|$ を消滅する．

このように場の演算子を生成・消滅演算子に替えていくことで，式(6.37)に到達する．

6.3.3 Borchers類

この話題もごく簡単に紹介するに留める．場の演算子の相関関数からS行列を求めるとき，補間場 φ とラグランジアンに現れる場との間に，何らかの関係が要求されるわけではない．実際LSZの定式化において，ラグランジアンやハミルトニアンに対する直接の言及はない．S行列の計算に必要なのは，補間場の演算子とその相関関数だけである．前節の議論によると，補間場の候補に必要とされるのは，正しいLorentz変換性と，真空状態と1粒子状態の間のゼロでない行列要素，

$$\langle p|\varphi(x)|0\rangle=\sqrt{Z}e^{ipx} \tag{6.57}$$

だけであって，そこから式(6.37)に基づき，必要な時間順序化真空期待値 (time-ordered vacuum expectation value：TVEV) によってS行列を計算できる．しかし少し考えると，この主張は完全に正しいとは言えないことが解る．場 $\varphi_{\rm in}(x)$ は必要とされる性質を備えているが，自由場のTVEVを用いるため，“自由場の理論のS

行列”が与えられる．微妙な違いの原因は，指定された性質を持つ任意の2つの場が同じS行列を与えるとき，両方の場を含むTVEVがLorentz共変であることを，暗黙のうちに仮定したことにある．この仮定は2つの場の組が“空間的領域において可換”でないと成立しない．これが非可換であれば，Lorentz変換によって場の演算子の順序が入れ替わる可能性があり，真空期待値の値も変わる．真空状態と指定された状態を結び，かつ空間的領域において可換という意味で“互いに局所的”な一組の場のことを“Borchers類”(Borchers class) と呼ぶ．類を構成するすべての要素は，同じS行列を与える．たとえば $\varphi(x)$ の相関関数と，$\sin\varphi(x)$ の相関関数は，同じS行列を与える．

第 7 章　Fermi粒子

我々はここから，古典論において対応する場が無いような量子場を扱う．

7.1　Dirac方程式

Dirac[1)]は1928年に，Klein-Gordon方程式の解の内積が正定値を持たない原因が，2階の時間微分にあるという認識に基づき，時間について1階の微分しか含まない方程式を見いだそうと考えた．彼はまず，式の形を次のように想定した．

$$(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi=0 \tag{7.1}$$

γ^{μ} は，まだ定義されていない何らかの量で，p_{μ} とは交換するが，それら同士は必ずしも交換しないものと考える．平面波解 $\psi\propto e^{ipx}$ の存在を仮定すると，

$$\gamma^{\mu}p_{\mu}+m=0 \tag{7.2}$$

でなければならない．Diracは，おそらく複素共役の概念を参考にして，これに $\gamma^{\mu}p_{\mu}-m$ を形式的に掛けることによって，

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}p_{\mu}p_{\nu}-m^2=0 \tag{7.3}$$

という関係を見いだした．更に彼は，次の関係，

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}\equiv\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu} \tag{7.4}$$

を仮定することにより，式(7.3)を質量殻の条件，

$$p^2=m^2 \tag{7.5}$$

と等価なものにした．この条件に基づいてDiracは，相対論的なエネルギー－運動量の関係を満たす方程式を得たのである．ここで，次の反交換関係を満たす γ とい

1)Paul Adrien Maurice Dirac：1902 年 8 月 8 日 Bristol, Gloucestershire (イギリス) 生まれ．1984 年 10 月 20 日 Tallahassee (フロリダ州) にて死去．1933年ノーベル物理学賞．

う量が，具体的に必要となる．

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{7.6}$$

このような関係に立脚した数学は“Clifford[2)]代数”と呼ばれる．おそらくDiracはCliffordの仕事のことを知らずに，γ の 4×4 表現を自ら見いだしたのである．これはDiracのガンマ行列（もしくはDirac行列）として知られている．付録Dにおいて $2N$ 次元の任意のEuclid空間で $2^N \times 2^N$ 行列が見いだせることを示す．

任意のLorentz変換 $L^\mu{}_\nu$ に対して，次の関係を満たす行列表現 $S(L)$ が存在するなら，Dirac方程式のLorentz共変性が保証される．

$$S(L)\gamma^\mu S^{-1}(L) = (L^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{7.7}$$

[読者はこの表現の性質 (7.7) において，右辺に L でなく L^{-1} が必要となる理由を理解されたい.] $z^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ であれば，

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial z^\mu} = L^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial z^\mu} \tag{7.8}$$

となる．ここから次の関係が得られる．

$$\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \gamma^\mu L^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial z^\mu} = S^{-1}(L)\gamma^\mu S(L)\frac{\partial}{\partial z^\mu} \tag{7.9}$$

この関係により，

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right)\psi = 0 \tag{7.10}$$

であれば，

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} + m\right)S\psi = 0 \tag{7.11}$$

となる．このような $S(L)$ が存在することを，付録Dに示しておく．

7.2 スピノル・テンソル・カレント

7.2.1 双一次形式

付録DにおいてEuclid計量 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ を持つ偶数次元の空間に対するDirac行列の構築の仕方を示してある．これらはHermite行列である．1, 2, 3 の対角要素の計量が負であるMinkowski空間でのDirac行列を得るには，$a = 1, 2, 3$ に対して

[2)] William Kingdon Clifford：1845 年 5 月 4 日 Exeter, Devon（イギリス）生まれ．1879 年 3 月 3 日 Madeira Islands（ポルトガル）にて死去．

$\gamma_a^{\text{Minkowski}} = i\gamma_a^{\text{Euclid}}$, $\gamma_0^{\text{Minkowski}} = \gamma_0^{\text{Euclid}}$ とおけばよい．得られる行列は，すべてがHermite行列ではなく，その代わりに次の関係を持つ．

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{7.12}$$

この修正されたHermite条件に合わせて，スピノル場 ψ に関する新たな共役量を定義すると便利である．

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \tag{7.13}$$

これは，次のような好都合な性質を持つ．

$$\psi \to S\psi \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi} \to (\psi^\dagger S^\dagger)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi}S^{-1} \tag{7.14}$$

$\bar{\psi}\psi$ はLorentz不変量となることが解る．また，

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ \to \ \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = L^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{7.15}$$

なので，この組み合わせはLorentz不変なベクトルである．

ここで $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ と定義する[3)]．これは，

$$\gamma_5^2 = 1, \quad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \tag{7.16}$$

という性質を持つ．カレント $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ の変換性を見てみよう．

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \ &\to \ i\bar{\psi}(S^{-1}\gamma^0 SS^{-1}\gamma^1 SS^{-1}\gamma^2 SS^{-1}\gamma^3 SS^{-1}\gamma^\mu S)\psi \\ &= iL^0{}_\alpha L^1{}_\beta L^2{}_\gamma L^3{}_\delta L^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\nu)\psi\end{aligned} \tag{7.17}$$

ここで $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ が，すべて異なるならば，これは次式と同じである．

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}L^0{}_\alpha L^1{}_\beta L^2{}_\gamma L^3{}_\delta L^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi = (\det L)L^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi \tag{7.18}$$

他方，添字の任意の対が一致していれば，$(\gamma^\alpha)^2 = 2g^{\alpha\alpha}$，$L^i{}_\alpha L^j{}_\alpha = \delta^{ij}$ で，式はゼロになる．したがって $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ は擬ベクトル (pseudo-vector) である．

同様に $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ は擬スカラー，$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ は対称テンソルである．

成分を数えあげると，6 個の $\sigma_{\mu\nu}$，4 個の γ^μ，4 個の $\gamma^5\gamma^\mu$，ひとつの γ^5，そして最後に単位行列 1 である．Lorentz成分は全部で 16 個ある．これは 4×4 行列の要素数でもある．実際に $\{\gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma^5, 1\}$ は互いに線形独立で，4×4 行列の空間を張る．

3) これは Minkowski記号の γ^5 で，付録 D の Euclid計量のものと因子 i だけ異なる．

7.2.2 保存則

元の方程式,

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{7.19}$$

により,

$$+i\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger + m\psi^\dagger = 0 \tag{7.20}$$

もしくは,

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{7.21}$$

の関係も成り立つ. したがって,

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = 0 \tag{7.22}$$

である. このようにカレント $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ は保存する. $J_0 = \psi^\dagger\psi$ であることに注意されたい. これは明らかに正定値の保存量であり, 望みとあらば確率密度と考えることもできる. この解釈によってDiracは, 一応のところ矛盾のない相対論的量子力学にたどり着いた. しかし残念ながら次節で示すように, この解釈からは, 量子力学系の最低エネルギー状態が決まらないという深刻な問題が生じる. 今日では $\psi^\dagger\psi$ を確率密度と解釈することはない. KG方程式の場合と同様に, これは"電荷"密度, すなわち, 粒子と反粒子の密度差を表す演算子と見なされている.

また, 次のような式も見いだすことができる.

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) = -2im\bar{\psi}\psi \tag{7.23}$$

したがって, 粒子の質量がゼロであれば, 擬ベクトルのカレント $J^5_\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi$ は保存する.

7.3 空孔とDiracの海

7.3.1 正と負のエネルギー

Dirac粒子に対するハミルトニアンを求めてみよう. 方程式,

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{7.24}$$

を変形して, 次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi &= (+m\gamma^0 - i\gamma^0\gamma^a\partial_a)\psi \\ &= (\beta m + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})\psi \end{aligned} \tag{7.25}$$

ここで,

$$\alpha^a = \gamma^0\gamma^a, \quad \beta = \gamma^0 \tag{7.26}$$

は，これらの行列を表すのに用いられる伝統的な記号である．これを,

$$i\partial_t\psi = \hat{H}\psi \tag{7.27}$$

と比較すると，Diracのハミルトニアン $\hat{H} = (\beta m + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})$ が得られる．

$\mathcal{H}$ の固有状態を調べる際に，$m = 0$ の場合と $m \neq 0$ の場合を分けて考察すると都合がよい．

我々は γ に関して“カイラル(chiral)表示[†]”もしくは“Weyl[4)]表示”と呼ばれる行列表示を採用する．

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

そうすると，$\hat{H}$ は次のように書ける．

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & m \\ m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

回転操作に対応するスピン演算子は,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

と表される．$\hat{H}$ に現れる $\boldsymbol{\sigma}$ の固有値は，粒子の物理的なスピンである．

質量のない粒子(Weylの表現が最も有用なのは，この場合である)に対する解は，2種類に大別されるが，それらは“カイラリティー”(chirality)すなわち γ^5 の固有値によって区別される(質量のない粒子に関して γ^5 は $\hat{H}$ と交換することに注意せよ．これが J^5_μ が保存する理由である．これは $\gamma^5 = +1$ の粒子によるカレントと $\gamma^5 = -1$ の粒子によるカレントの差を表す)．カイラリティー +1 (右手型)の状態は，次の形になる．

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

[†](訳註)“カイラル”(chiral)の語源はラテン語で“手に関する”という意味である．この表示によって“右手型”と“左手型”の状態を区別できる．

[4)]Hermann Weyl：1885年11月9日 Elmshorn (ドイツ，Hamburg近郊)生まれ．1955年12月8日 Zürich (スイス)にて死去．

この状態は $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ の固有値 $\pm|\mathbf{p}|$ によってエネルギーが決まり，右ネジのように運動量とスピンの方向が一致するときに，正のエネルギーを持つ．このように解が“右巻き”である場合，粒子が正の“ヘリシティー”(helicity[‡]) を持つと言う．他方，カイラリティーが -1 (左手型) の状態は次の形をとる．

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

この場合，正のエネルギーを持つ解は，スピンと運動量が反対向きで，負のヘリシティーを持つ．カイラリティーの異なる状態は結合しないので，どちらか一方だけで Lorentz 不変な場を構築することができる．ここで得られる 2 成分スピノルの粒子は“Weyl フェルミオン”(Weyl fermion) と呼ばれる．右手型の Weyl フェルミオンは，次の“Weyl方程式”を満たす．

$$i(\partial + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.33}$$

ニュートリノ (neutrino) は Weyl フェルミオンの候補と考えられてきた．この粒子は重力もしくは弱い力だけを通じて，他の粒子と相互作用をする．弱い相互作用の過程には左手型のカイラル成分だけが関与する．ニュートリノが小さい質量を持つことを示唆する報告もあるが，仮に厳密に質量がゼロであるとすると，弱い相互作用で生じたニュートリノは永久に左手型の状態を保ち，左手型の Weyl方程式だけに従う．ビッグバンのときに生成された右手型のニュートリノが残っているとしても，それらは素粒子反応に関与せず，宇宙的な規模の効果 (ホットダークマター hot dark matter) 以外からの検出は不可能である．

Weyl方程式には負エネルギーの解も存在する．カイラリティーが $+1$ の粒子では $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} < 0$ になる．すぐ後にこれらの解と反粒子の関係を述べる．右手型の Weyl粒子とその反粒子はスピンと 3 次元運動量ベクトルが互いに逆向きである．このようにカイラリティーが $+1$ の“粒子”は正のヘリシティーを持ち，その“反粒子”は負のヘリシティーを持つ．

$m \neq 0$ のときの解を見いだすため，線形代数の射影演算子の技法を用いることができる．まず次の式を見てみる．

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= \left(\gamma^0(\gamma^i p_i + m)\right)^2 \\ &= -(\gamma^i p_i - m)(\gamma^0)^2(\gamma^j p_j + m) \\ &= \mathbf{p}^2 + m^2 \end{aligned} \tag{7.34}$$

[‡](訳註) 語源はギリシャ語の *hélikos* で“らせん状の～”という意味である．

右辺はスピノル空間の単位元に比例する．これは $\hat{H}^2$ が $\psi = \chi e^{ipx}$ の形の固有状態を持ち，ここで χ は任意の 4 元定数スピノルで，4 元運動量は質量殻上 $(p^2 = m^2)$ の条件を満たし，エネルギーは $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ であることを意味する．

ここでDiracの量子力学の教科書にある技法を用いて，$E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ で $\hat{H}^2 = E^2$ の関係を満たす任意のハミルトニアンによって，単位演算子が次のように分解できることを見てみる．

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2E}(E + \hat{H}) + \frac{1}{2E}(E - \hat{H}) \\ &= P_+ + P_- \end{aligned} \tag{7.35}$$

$P_\pm$ は次の性質を持つ．

$$P_\pm^2 = \frac{1}{4E^2}(E^2 + \hat{H}^2 \pm 2E\hat{H}) = \frac{1}{4E^2}(2E^2 \pm 2E\hat{H}) = P_\pm \tag{7.36}$$

$$P_+P_- = \frac{1}{4E^2}(E^2 - \hat{H}^2) = 0 \tag{7.37}$$

また，次の関係も得られる．

$$\hat{H}P_\pm = \frac{1}{2E}(\pm\hat{H}^2 + E\hat{H}) = \pm EP_\pm \tag{7.38}$$

したがって $P_\pm$ は固有値 $\pm E$ を持つ固有空間への射影演算子である．定数スピノルの空間は $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ のように分解する．$\mathcal{H}_\pm$ は正・負エネルギー解の空間であり，$\mathcal{H}_\pm = P_\pm\mathcal{H}$ である．

$P_\pm$ を任意の定数スピノル χ に作用させて $\hat{H}$ の固有状態を作ることができる．スピンの固有状態である χ から始めれば，そのスピンを持つエネルギー固有状態に到達する．

7.3.2 空孔

負のエネルギーを持つ状態 $(\in \mathcal{H}_-)$ の存在は，粒子の最低エネルギーが決まらないことを意味するので，当初は理論にとって好ましからざる性質のように思われた．しかしDiracは1930年に“Diracの海”(Dirac sea) と呼ばれる概念にたどり着いた．彼はDirac方程式がFermi粒子だけに適用されるべきもので，この方程式で記述される粒子はPauliの排他律に従わなければならないことに気がついた．ここで，すべての負エネルギーの状態があらかじめ粒子に占有されており，負のエネルギー領域には新たに粒子が入り込めないものと仮定してみよう．そうすると単一粒子としては際限なく低い負のエネルギーを持ち得るにしても，多体系全体のエネルギーの

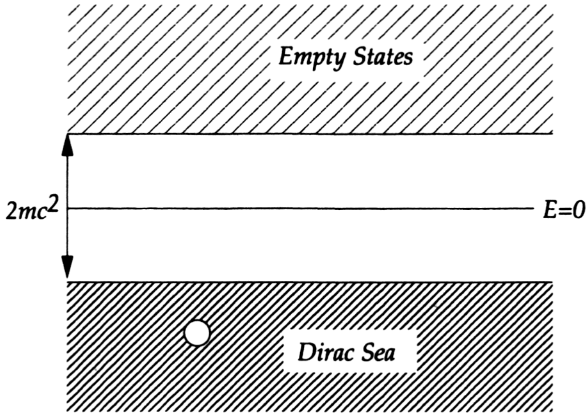


図 7.1 Diracの海における空孔.

“下限”は確定していると考えることができる．系に粒子を付け加えても，系から粒子を取り除いても，系のエネルギーは常に増加する．

この概念を把握するために，質量を持たないカイラリティー $+1$ の粒子系を考えてみよう．エネルギーは $E = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ である．“海”の中から運動量 $-\mathbf{k}$，スピン $\boldsymbol{\sigma} \parallel \mathbf{k}$，エネルギー $-|E| = +\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{k})$ の粒子をひとつ取り除くとき，系のエネルギーは $+|E|$，運動量は $\mathbf{k}$，スピンは $-\boldsymbol{\sigma}$ だけ変化する．生成される“空孔”(hole)は正のエネルギーを持つが，スピンと運動量は互いに反平行になる．この“空孔”が“反粒子”(antiparticle)に対応する．

あらゆる粒子は，エネルギーの正負，カイラリティー，正反粒子の区別に関わらず，運動量と同じ方向の速度を持つことを指摘しておく．負号がいろいろと関与してくるので，これは必ずしも自明のこととは言えないであろう．分散関係が $\omega(\mathbf{p})$ である波の波束の速さは，群速度によって与えられることを思い出そう．

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}} \tag{7.39}$$

例として，次のような負エネルギーの状態を考える．

$$E_{\mathbf{p}} = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \tag{7.40}$$

この状態を表す波の群速度は次のようになる．

$$\mathbf{v}_g = \frac{-\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \tag{7.41}$$

群速度は $-\mathbf{p}$ の方向を向いているが，空孔の運動量はまさに $-\mathbf{p}$ である．

7.4 量子化

次のように定義した作用量の変分からDirac方程式を導くことができる.

$$S = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\right] \tag{7.42}$$

$\bar{\psi}$ の変分によって，次式が与えられる.

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{7.43}$$

また ψ の変分からは，次式が与えられる.

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{7.44}$$

ψ に対する共役運動量は $i\psi^\dagger$ なので，まずは次の量子化条件が思い浮かぶ.

$$\left[\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{x}')\right] \stackrel{?}{=} \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{7.45}$$

しかしこの交換関係はうまく働かない．我々はスペクトルに下限がないという問題に直面することになるが，これはDirac粒子に排他律と空孔理論を適用することによって解決される．すなわち ψ は次のように，Fermi場として量子化されなければならない.

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{x}')\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{7.46}$$

モード展開を見るには，ハミルトニアンよりもDirac方程式を用いるほうが好ましい．得られる情報は同じであるが，方程式を直接利用する方が簡単である.

この節では，次の標準的な表記法を用いる.

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \tag{7.47}$$

次の形を持つ平面波解を求めることにする.

$$\psi = u(p)e^{-ipx} \quad \text{or} \quad v(p)e^{ipx} \tag{7.48}$$

そうすると，次の条件が与えられる.

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)u(p) = 0 = \bar{u}(p)(\not{p} - m)\\ (\not{p} + m)v(p) = 0 = \bar{v}(p)(\not{p} + m)\end{aligned} \tag{7.49}$$

前節と同様に，質量殻の条件,

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2 = 0 \tag{7.50}$$

を利用して，次のように書くことができる．

$$1 = \frac{1}{2m}(m + \not{p}) + \frac{1}{2m}(m - \not{p})$$
$$= \Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) \tag{7.51}$$

$\Lambda_\pm(p)$ は射影演算子 (projection operator) である．

$$\Lambda_\pm^2(p) = \Lambda_\pm(p), \quad \Lambda_+(p)\Lambda_-(p) = 0 \tag{7.52}$$

各スピン成分に対応する適当な u と v を見いだすために，これらの演算子を用いることにする．演算子の具体的な形を明示する必要はない．

$u^{(r)}(p)$，$v^{(r)}(p)$ $(r = 1, 2)$ を，次のように規格化することにする．

$$\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) = -\bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) = \delta^{rs} \tag{7.53}$$

なお，$0 = \bar{u}^{(r)}(\{\not{p} - m, \gamma^\mu\})u^{(s)}$ なので，

$$2p^\mu \bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) = 2m\bar{u}^{(r)}(p)\gamma^\mu u^{(s)}(p) \tag{7.54}$$

であり，規格化条件は次式と等価である．

$$u^{\dagger(r)}(p)u^{(s)}(p) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta^{rs} \tag{7.55}$$

同様に，次の条件も成立する．

$$v^{\dagger(r)}(p)v^{(s)}(p) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta^{rs} \tag{7.56}$$

完全性の関係は有用である．

$$\Lambda_+(p) = \sum_r u^{(r)}(p)\bar{u}^{(r)}(p) = \frac{1}{2m}(m + \not{p}),$$
$$\Lambda_-(p) = -\sum_r v^{(r)}(p)\bar{v}^{(r)}(p) = \frac{1}{2m}(m - \not{p}) \tag{7.57}$$

多くの文献で，スピノルに関しては，この $E_{\mathbf{p}}/m$ の規格化が用いられている．

ψ を次のように量子化する．

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}')\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{7.58}$$

ここで，

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_{\mathbf{k}}}\left\{\hat{a}_{\mathbf{k}r}u_\alpha^{(r)}(p)e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{k}r}^\dagger v_\alpha^{(r)}(p)e^{+ipx}\right\} \tag{7.59}$$

と展開した場合，

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}r}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s}\} = (2\pi)^3 \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta^{rs} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$
$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}r}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}'s}\} = (2\pi)^3 \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta^{rs} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{7.60}$$

とおくと (Lorentz不変な規格化)，反交換関係は整合する．

ハミルトニアンは，次のように書ける．

$$\hat{H} = \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{k}}} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}r} \hat{a}_{\mathbf{k}r} - \hat{b}_{\mathbf{k}r} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}r} \right) \tag{7.61}$$

無限大の定数 (満たされたDiracの海のエネルギー) を差し引いて，ハミルトニアンを次のように書き直すこともできる．

$$\hat{H} = \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{k}}} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}r} \hat{a}_{\mathbf{k}r} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}r} \hat{b}_{\mathbf{k}r} \right) \tag{7.62}$$

これと同様にして，運動量の演算子は次のように書ける．

$$\hat{P}^\mu = \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{k}}} P^\mu \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}r} \hat{a}_{\mathbf{k}r} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}r} \hat{b}_{\mathbf{k}r} \right) \tag{7.63}$$

7.4.1 正規積と時間順序積

第 3 章で示した時間順序積と正規積の定義では，種々の場の演算子を望ましい順序に並べ替える際に，それぞれの場の入れ替えにおいて生じるはずの c-数を無視した．言い替えると，場それ自身が c-数であるかのように扱った．Fermi粒子に対してこれらの積を定義する場合にも，演算子の交換に付随する c-数の項を省くことになるが，Fermi場同士の交換から発生する演算子積へのマイナス符号は無視できない．言い替えるとFermi場を“反可換な c-数”もしくは“Grassmann[5]数”として扱わなければならない．たとえば，時間順序積，

$$T\left\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')\right\} \tag{7.64}$$

は，次のように定義される．

$$\theta(x_0 - x_0')\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x') - \theta(x_0' - x_0)\psi_\beta(x')\psi_\alpha(x) \tag{7.65}$$

この式は $x \leftrightarrow y$ の交換に関して“反対称”になっている．

[5]Hermann Günther Grassmann：1809 年 4 月 15 日 Stettin (プロシャ)——現在の Szczecin (ポーランド) 生まれ．1877 年 9 月 26 日 Stettin (ドイツ) にて死去．

伝播関数 $iS_{\alpha\beta}(x,y)$ は次のように定義される.

$$iS_{\alpha\beta}(x,y) = \langle 0|\, T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle \tag{7.66}$$

ここで,

$$\begin{aligned}(-i\not{\partial}_x + m)_{\alpha'\alpha}\langle 0|\, T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle &= -i\gamma^0_{\alpha'\alpha}\delta(x_0 - y_0)\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\}\\ &= -i\delta^4(x-y)(\gamma^0)^2_{\alpha'\beta}\\ &= -i\delta_{\alpha'\beta}\delta^4(x-y)\end{aligned} \tag{7.67}$$

なので, 伝播関数の式を予想することができる.

$$iS_{\alpha\beta}(x,y) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-x')}\, \frac{(\not{k}+m)_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{7.68}$$

完全系を成す状態一式を挿入して計算を行うことで, 上式を確認できる. $i\epsilon$ は単に伝播関数がDirac方程式のGreen関数であるという要請だけからは現れない因子である.

また運動量空間におけるFermi粒子の伝播関数として,

$$iS(k) = \frac{i}{\not{k} - m} = i\frac{\not{k}+m}{k^2 - m^2} \tag{7.69}$$

の表記を用いる場合もある.

ダイヤグラムを評価するためにWickの定理を適用するときには, 伝播関数を作る操作に伴って多くのマイナス符号が現れる. 演算子の対を縮約して伝播関数にするには, まず縮約をとる演算子を正しい順序で隣接させて $iG(x,y) = \langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$ が作れるようにしなければならない. たとえば,

$$\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\bar{\psi}_4 \tag{7.70}$$

という積を扱う場合, ψ_1 と $\bar{\psi}_2$, ψ_3 と $\bar{\psi}_4$ をそれぞれ縮約するならば, そのままの順序で $iG(1,2)iG(3,4)$ が得られる. 他方 $\bar{\psi}_2$ と ψ_3, ψ_1 と $\bar{\psi}_4$ の縮約を取るときには, ψ_1 を後ろの2つの演算子と入れ替えることによって2つのマイナス符号が生じ, 更に $\bar{\psi}_2\psi_3 = -\psi_3\bar{\psi}_2$ の入れ替えによってもうひとつのマイナス符号が生じる. 縮約の結果は $-iG(1,4)iG(3,2)$ となる.

第 8 章　量子電磁力学

この章では量子電磁力学 (quantum electrodynamics：QED) における Feynman 規則を導く．光子と電子の相互作用を扱う Feynman の方法の成功によって，場の理論は特別に数学の素養を持つ者だけが扱える高度な技術ではなくなり，多くの物理学者たちが実際に利用できる技能となった．

8.1　Maxwell方程式の量子化

まず我々は量子力学を電磁波へ適用する方法を学ぶことにする．この問題の難しさは，電磁場の方程式が持つ“ゲージ不変性”(gauge invariance) から生じる．最終的に得られるダイヤグラムの規則は，それを導く過程で必要となる形式よりも遥かに簡単なものとなる．

8.1.1　ハミルトニアン形式

電磁気学のハミルトニアン形式をつくるためには，動的な場としてのポテンシャル A_μ を用いる必要がある．Maxwell の方程式は，場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ だけを決め，ゲージ変換 (gauge transformation) $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ は $F_{\mu\nu}$ に影響しないので，運動方程式からポテンシャル A_μ が一意的に決まるわけではない．

ゲージ不変性は，光子が質量を持たないことに付随する性質である．Lorentz ベクトル場は，自然に 4 成分を備えている．スピン 1 の粒子を記述しようとするならば，このうち 3 成分だけが独立であると予想される．もしベクトル場が質量項を持つならば，それによって自動的に A_μ に $\partial_\mu A^\mu = 0$ の条件が課される．この条件があると自由度がひとつ消滅し，期待通りに 3 つの自由度が残る．しかし質量のないスピン 1 の粒子は“2 つのモード”(右回りと左回りの円偏光モード) しか持たない (これは質量のない粒子に対する Poincaré 群の表現論から現れる)．何かに着目して自由度をひとつ減らす必要があるが，この“何か”というのがゲージ不変性なのである．

8.1.2 軸性ゲージ

一意的なポテンシャルの解を求める場合，A_μ に何らかのゲージ条件を課する必要がある．おそらく最も単純な条件は“軸性ゲージ”(axial gauge†) の条件であろう．このゲージでは $A_0 \equiv -\phi = 0$ と置く．ラグランジアンは次のように書ける．

$$L = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\} + \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right] \tag{8.1}$$

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \tag{8.2}$$

定義により $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ である．ここで $\mathbf{A}$ と $-\mathbf{E}$ が正準共役であることが見てとれる．通常の手続きに従って，ハミルトニアンを得ることができる．

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right] \tag{8.3}$$

6 本の Hamilton の運動方程式は，次のようになる．

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{8.4}$$

$\mathbf{A}$ はこれらの方程式だけから一意的に決まるわけではない．我々は“時間に依存しない”任意のゲージ変換 $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{x})$ を施すことができる．その上，Maxwell 方程式の第 4 式である Gauss の法則，

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho \tag{8.5}$$

は，Hamilton の運動方程式としても Lagrange の運動方程式としても“導出されない”．これは $A_0 = 0$ と置き，ラグランジアン L が ρ を含まないようにしたことによる必然的な結果であり，驚くべきことではない．他の 3 本の Maxwell 方程式が導かれて，これらによって，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{E} - \rho) = \nabla\cdot(\nabla \wedge \mathbf{B} - \mathbf{J}) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{8.6}$$

の関係が与えられる．$\nabla\cdot(\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0$ であり，電荷保存 $\dot{\rho} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ を仮定すると，式(8.6)の左辺はゼロである．したがって $t = 0$ において Gauss の法則が成立していれば，後の時刻でもずっと Gauss の法則が成立することになる．

このゲージ条件の下で量子化を行うため，次の交換関係を設定する．

$$\left[E_i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)\right] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{8.7}$$

†(訳註) 時間的軸性ゲージ (time-like axial gauge) という意味である．

ここで演算子の初期条件として $\nabla\cdot\mathbf{E}-\rho=0$ を導入したくなるが，この条件はうまく働かない．式(8.7)は，

$$U_\Lambda \mathbf{A} U_\Lambda^{-1} = \mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{x}) \tag{8.8}$$

$$U_\Lambda = \exp\left(i\int d^3x\,\mathbf{E}\cdot\nabla\Lambda(\mathbf{x})\right) = \exp\left(-i\int d^3x\,\Lambda(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{E}\right) \tag{8.9}$$

を意味する．電荷密度演算子 $\hat{\rho}$ を伴う物質場を導入する場合には，$\nabla\cdot\mathbf{E}-\hat{\rho}$ がゲージ変換の生成子になることが見いだされる．これはゼロではあり得ない．

しかし相互作用とオブザーバブルをゲージ不変な形を持つものに限れば，これらは $\nabla\cdot\mathbf{E}-\hat{\rho}$ と交換するので，我々が"物理的"(physical) と見なす状態に関して次の補助条件，

$$(\nabla\cdot\mathbf{E}-\hat{\rho})|\text{physical}\rangle = 0 \tag{8.10}$$

を課することができる．系の状態が，初めにこの部分空間に属していれば，その状況が継続する．

ゲージ不変性は一種の対称性のように言われることが多いが，普通の意味で言うところの対称性ではない．これはむしろ系を記述するために用いている変数一式が，余分な自由度を含んでいることを意味する．物理的な状態に関する補助条件 (8.10) は，物理的に意味のある波動関数が，冗長性のある変数一式の自由度をすべて持っているわけではないことを表しているのである．

8.1.3 Lorentzゲージ

前節の軸性ゲージの形式は直観的であり，格子ゲージ理論に関連してよく知られている．しかしこの形式は明らかにLorentz不変性を持たない．実際的な計算に用いる形式は，Lorentz 対称性が明確であるものが好ましい．残念ながら共変ゲージへの伝統的なアプローチは，何れも単純な Hilbert空間の解釈にうまく結びつけることができない．現代的なアプローチはBRSTコホモロジー (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin cohomology) を用いたものになるが，この話題には立ち入らない．ここでは量子電磁力学の Feynman規則を導く目的で，早くから知られている Gupta-Bleuler形式 (Gupta-Bleuler formalism) だけを示すことにする．

共変な作用は，次のように書ける．

$$S = \int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu\right\} \tag{8.11}$$

$A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$ と置いて $E^a = F_{a0}$，$B^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}F_{bc}$，$j^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ とすると，これは式(8.1)と整合する (E や B は4元ベクトルではないので，これらの添字の上下に特別な意味はない)．A_μ の変分によって運動方程式が与えられる．

$$-\partial^2 A^\mu + \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu \tag{8.12}$$

式(8.12)の下では，電流密度の保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成立する．我々は運動方程式を修正して電流密度の保存が自然に成立しないようにした場合にも，常にこの電流密度の保存を仮定する．

"Lorentzゲージ"での量子化のため，ラグランジアン密度へ次の項を加える．

$$\mathcal{L}_{\text{Lorentz}} = -\frac{1}{2}\lambda(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{8.13}$$

これは"ゲージ固定項"(gauge fixing term) であり，異なる λ の選択の仕方は，言葉の濫用のために"異なるゲージ"と呼ばれている．$\lambda = 1$ と置いたものを特に"Feynmanゲージ"と称する．物理的な実体は，λ の選択の仕方には無関係でなければならない*．

運動方程式は，次のように修正される．

$$-\partial^2 A^\mu + (1-\lambda)\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu \tag{8.14}$$

この式の発散をとり，$\partial_\mu j^\mu = 0$ を仮定すると，

$$\lambda \partial^2 (\partial^\mu A_\mu) = 0 \tag{8.15}$$

となるので，$(\partial^\mu A_\mu)$ は"自由場"である．この量は，電流密度やその他の量と結合しない．古典的な扱いでは $\partial^\mu A_\mu = 0$ と置いて，これについて忘れてしまえばよい．しかし量子力学になると，$\partial^\mu A_\mu$ が他の場との間でゼロでない交換子を持つので，この方法は選択肢に入らない．$\lambda\partial^\mu A_\mu$ は A_0 に対して正準共役な運動量変数となる．

一般の λ に対する正準形式は複雑になる．Feynmanゲージ $\lambda = 1$ を選ぶのが簡便な方法であり，作用は部分積分の計算を経て，

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 + j^\mu A_\mu \right\} \tag{8.16}$$

もしくは，

$$S = \int d^4x \left\{ +\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}(\partial^\mu A_a)(\partial_\mu A_a) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_0)(\partial_\mu A_0) - j^\mu A_\mu \right\} \tag{8.17}$$

*(訳註) ゲージを選ぶパラメーターとして $\xi = \lambda^{-1}$ を用いる文献もある．

となる．これは添字 $\nu=0,1,2,3$ の付いた4つの"スカラー場"の単純な作用量の形になっている——但し A_0 に関する運動エネルギーの符号だけは違っている．この些細な点を無視すると，次の交換関係による量子化を考えることができる．

$$\left[A_\mu(\mathbf{x},t),\dot{A}_\nu(\mathbf{x}',t)\right]=-ig_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{8.18}$$

A_μ を，

$$A_\mu=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}\left\{\hat{a}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx}+\hat{a}_\mu^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx}\right\} \tag{8.19}$$

と展開すると，

$$\left[\hat{a}_\mu(\mathbf{k}),\hat{a}_\nu^\dagger(\mathbf{k}')\right]=-g_{\mu\nu}2E_\mathbf{k}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{8.20}$$

である．

式(8.20)は一見，特に問題のない共変な交換関係のように見えるが，少し考えると $\hat{a}_0^\dagger(\mathbf{k})$ が負の自乗ノルムを持つ状態，すなわち"ゴースト"(ghost†)を生成してしまうことが分かる．これは大問題である．我々は通常，自乗ノルムを確率と解釈するが，負の確率というものは意味をなさない[1)]．ここで再び物理的な状態の部分空間を限定する条件によって，矛盾を避けることができる．我々はゲージ条件 $\partial^\mu A_\mu=0$ を満たそうとしているので，まずは次のような補助条件が予想される．

$$(\partial^\mu A_\mu)|\text{physical}\rangle\overset{\text{wrong!}}{=}0 \tag{8.21}$$

しかし，この条件は実際には強すぎる．代わりに次の補助条件を課してみる‡．

$$(\partial^\mu A_\mu)^+|\text{physical}\rangle=0 \tag{8.22}$$

$(\ldots)^+$ は正の振動数，すなわち消滅演算子の部分を意味する($\partial^\mu A_\mu$ が自由場であることにより，この分解が成立する)．

たとえば $\mathbf{k}$ が z 方向を向いていれば，この物理的な部分空間の条件は，

$$(\hat{a}_0+\hat{a}_3)|\text{physical}\rangle=0 \tag{8.23}$$

となる．このときの物理状態 $(\hat{a}_0|\text{physical}\rangle=-\hat{a}_3|\text{physical}\rangle)$ の間で $\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3-\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0$ の期待値はゼロになる．このことはハミルトニアン，

$$\hat{H}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{k}}E_\mathbf{k}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3-\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0) \tag{8.24}$$

†(訳註)"お化け"，"幽霊"などの訳語が使われることもある．

1)ここで $\hat{a}_0^\dagger$ を"消滅演算子"と考えて $\hat{a}_0^\dagger|0\rangle=0$，$\hat{a}_i|0\rangle=0$ $(i=1,2,3)$ と置きたくなるが，時間と空間が別扱いになるため，残念ながらこのような $|0\rangle$ はLorentz共変でなくなってしまう．

‡(訳註) 式(8.21)はFermiの補助条件，式(8.22)はGuptaの補助条件と呼ばれる．

の期待値を計算する際に，物理的に意味のある 1, 2 の横方向モードだけがエネルギーへの寄与を持つことを意味する．更に進んだ Hilbert 空間の構造に関する議論については，付録 E に示した不定計量の解説を参照されたい．

伝播関数 $iG_{\mu\nu}(x,x') = \langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(x')\}|0\rangle$ はどうなるであろうか？ これは通常通り，電磁ポテンシャルの Green 関数になる．今のケースでは，

$$-\partial^2 A^\mu + (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\nu A^\mu = j^\mu \tag{8.25}$$

であり，Fourier 空間において，方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned} k^2A^\mu - (1-\lambda)k^\mu k_\nu A^\nu &= j^\mu \\ (k^2)\Big(\delta^\mu_\nu - (1-\lambda)\frac{k^\mu k_\nu}{k^2}\Big)A^\nu &= j^\mu \end{aligned} \tag{8.26}$$

伝播関数は $\mu\nu$ 行列として，次のように与えられる．

$$iG_{\mu\nu}(x,x') = -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2+i\epsilon}\Big(g_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) \tag{8.27}$$

この伝播関数を波線で表すことにする*.



図 8.1 光子の伝播関数.

物理的実体は恣意的な λ の選択に影響されないはずなので，すべてのダイヤグラムで $\lambda = 1$ と設定し，射影項を忘れてしまってよい．式(8.27)の右辺の先頭にあるマイナス符号に注意されたい．これは (8.20) と整合しており，第 3 章で湯川ポテンシャルを扱ったときのように，同符号の電荷は反発し，異符号の電荷は引き合うことを示す．

偏極ベクトル (polarization vector) $\epsilon^{(r)}_\mu(\mathbf{k})$ を導入すると都合がよい．

$$A_\mu = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\Big\{\hat{a}_{(r)}\epsilon^{(r)}_\mu(\mathbf{k})e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger_{(r)}\epsilon^{(r)*}_\mu(\mathbf{k})e^{+ikx}\Big\} \tag{8.28}$$

$r = 0,1,2,3$ は，各偏極方向の基底を識別する添字である．我々はあらゆる初期状態と終状態の偏極が“横方向”であることを認識しなければならない．すなわち $\epsilon^{(r)}_\mu = (0,\mathbf{e})$ で $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = 0$ である．z 軸の正の方向を向いた $\mathbf{k}$ に対して，右回りおよび左回りの円偏光 (circularly polarized light) は $\epsilon^\mu = (0,1,\pm i,0)/\sqrt{2}$ と表される．光学の分野における慣例に合わせて，伝播方向の角運動量成分が $-\hbar$ のものを右回りの円偏光，角運動量成分が $+\hbar$ のものを左回りの円偏光と呼んでいる．

*(訳註) 光子 (固有質量を持たないベクトル場) の伝播関数を $G_{\mu\nu}$ でなく $D_{\mu\nu}$ と記す文献が多い.

8.2 量子電磁力学におけるFeynman規則

量子電磁力学のための作用量(ラグランジアン)はDirac場とMaxwell場の作用を組み合わせたものである.

$$S=\int d^4x\Big\{\bar{\psi}\big(-i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)+m\big)\psi-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big\} \tag{8.29}$$

相互作用項 $\mathcal{L}_\mathrm{I}=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ はLorentz共変であり,局所的なHermite演算子である.また,全作用は次のゲージ変換の下で不変である.

$$\psi\to e^{i\Lambda(x)}\psi,\quad A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda \tag{8.30}$$

$\psi(x)$ は点 x において,振幅 $u(k)e^{-ikx}$ の電子を消滅させるか,もしくは振幅 $v(k)e^{+ikx}$ の陽電子(positron)を生成する.同様に $\bar{\psi}(x)$ は振幅 $\bar{u}(k)e^{+ikx}$ の電子を生成するか,もしくは振幅 $\bar{v}(k)e^{-ikx}$ の陽電子を消滅させる.

Feynman規則は以下の通りである.

1. それぞれの摂動次数について,関心のある過程に関する n 個の結節点を持つグラフをすべて描く.
2. 各々の光子の線に,因子 $-ig_{\mu\nu}/(p^2+i\epsilon)$ をあてる.
3. 各々の結節点に,因子 $ie\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^4(\sum p)$ をあてる.
4. 各々のFermi粒子の線に,因子 $i(\not{p}+m)/(p^2-m^2+i\epsilon)$ をあてる.
5. 4元運動量の積分 $\int d^4p/(2\pi)^4$ を実行する.
6. 各々の外線に,以下に示す因子をあてる.
   - 入射する電子:$u(p)$
   - 入射する陽電子:$\bar{v}(p)$
   - 放出する電子:$\bar{u}(p)$
   - 放出する陽電子:$v(p)$
   - 結節点に入る光子の線:偏極ベクトル $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$
7. 同じ形のグラフに関し,外線Fermi粒子の入れ替え(入射粒子と放出反粒子,入射反粒子と放出粒子の入れ替えも含む)に応じて ±1 を付加する.
8. 閉じたFermi粒子のループの数 L に応じて $(-1)^L$ を付加する.

ここで言及すべき部分は,閉じたFermi粒子のループに与えられる因子 (-1) であろう.この符号因子は,縮約をとる際に必要な演算子の入れ替えによって生じて

いる．これが排他律を保証している．この事情を見てみるために，図8.2のダイヤグラムを考えよう．これらはRayleigh-Schrödinger摂動級数の中の，3次元運動量に関する積分の項を表しており，Feynmanダイヤグラムの結節点の時間順序を指定したものである．時間軸を上向きに取ることにする．

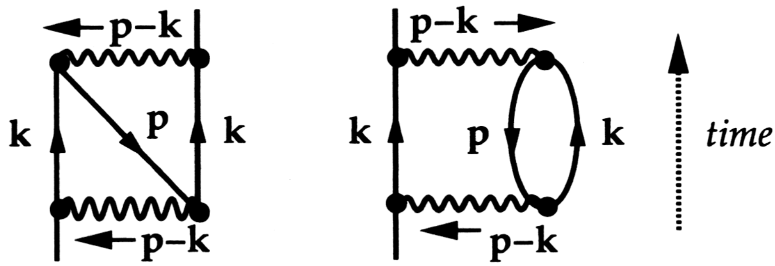


図8.2　左のダイヤグラムに対応する項は，右のダイヤグラムに対応する項と相殺する．これによって排他律が保証される．

左側のダイヤグラムでは，中間状態において同じ運動量 **k** を持つFermi粒子が存在する．これはFermi統計において許容されないことである．右側のダイヤグラムも中間状態は全く同じで，エネルギー分母も同じである．しかし両者はトポロジー的に異なり，右側のダイヤグラムだけに閉じたFermi粒子のループがある．このループから生じる因子 (-1) によって，右側のダイヤグラムの計算結果は，左側のそれと完全に相殺する．

Feynmanが初めに量子電磁力学のダイヤグラム規則を書き下した時，彼は宇宙に存在するすべての電子と陽電子が，実は時間の中を頻繁に行き来する単一粒子に過ぎない (図8.2の左図のように) というアイデアに執着していた．そこで当初，彼は閉じたFermi粒子のループは必要でないと主張した．排他律の問題を指摘されて初めて，Feynmanはしぶしぶ閉じたループの必要性を認めたのであった．

奇数本の光子の外線が付いているFermi粒子のループは“無視できる”ことに注意されたい．これらは電荷共役不変性によってゼロになる (Furryの定理).

8.2.1　Møller散乱

Feynman規則の実例としてMøller散乱を取り上げよう．これは電子－電子散乱である．最低次において，直接散乱および交換散乱の2つのグラフが考えられる．

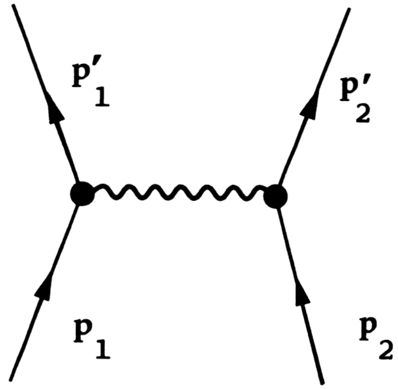


図 8.3　直接 Mϕller 散乱.

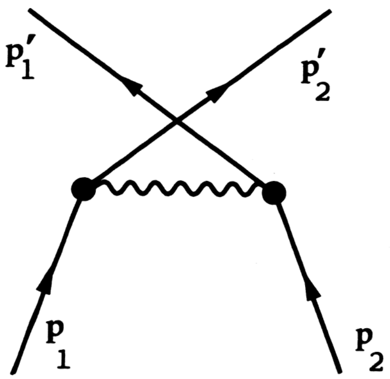


図 8.4　交換 Mϕller 散乱.

$$S = (2\pi)^4 i\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')T \tag{8.31}$$

とおくと，T に対するこれらのダイヤグラムの寄与は次のように表される†.

$$T = e^2\left[\frac{\left[\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(p_2)\right]}{(p_1 - p_1')^2 + i\epsilon} - \frac{\left[\bar{u}(p_2')\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_1')\gamma_\mu u(p_2)\right]}{(p_1 - p_2')^2 + i\epsilon}\right] \tag{8.32}$$

†(訳註) 本書ではLorentz不変な規格化を採用しているため，T の行列要素は，他の文献でしばしば用いられる不変遷移行列 $\mathcal{M}$ の要素に一致する$\Big($上の例では $S = i(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\sqrt{m/E_1}\sqrt{m/E_2}\sqrt{m/E_1'}\sqrt{m/E_2'}\mathcal{M}$. [$i$を省く流儀もある.] E は p のエネルギー成分$\Big)$. 普通に規格化された状態を扱う場合はFeynman規則 (p.99) において (1) 各外線因子を $u(p) \to \sqrt{m/E}\,u(p)$ etc, $\epsilon_\mu^{(\lambda)} \to \left(1/\sqrt{2|\mathbf{p}|}\right)\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ のように置き換えて S の計算規則とするか，(2) あらかじめ各結節点の4元運動量保存を考慮して結節点因子を $ie\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p) \to ie\gamma^\mu$ と置き換え，$(1/i)\mathcal{M}$ [もしくは$\mathcal{M}$] を算出する.

終状態における粒子の相対的な入れ替わりによって，第2項にマイナス符号が付いていることに注意されたい．

グラフに対応する式を書き下す際に，光子の伝播関数において $\lambda = 1$ と置き，分子が $g_{\mu\nu}$ の因子だけを含むようにした．$g_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu} + \zeta k_\mu k_\nu$ に置き換えても違いを生じないことを示し，ゲージ不変性を確認しよう．第1項の分母には，

$$\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)(p_1' - p_1)_\mu \bar{u}(p_2')\gamma^\nu u(p_2)(p_1' - p_1)_\nu \tag{8.33}$$

に比例する因子が加わるが，$(\not{p} - m)u(p) = \bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0$ なので，この因子はゼロになる．

もし第1項だけが存在するならば，2つの粒子は識別可能である．このような場合を考察してみよう．たとえば $e\mu$ 散乱がこれにあたる．

多くの散乱実験は，偏極方向に偏りのない粒子と，偏極を区別しない検出器を用いて行われる．初期状態と終状態のスピンを特定しないならば，初期状態のスピン状態を平均化し，終状態について各スピン状態の総和を計算しなければならない．したがって実効的な断面積は，次式で表される．

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\sum_{s_1'}\sum_{s_2'}\left|T(s_1, s_2 \to s_1', s_2')\right|^2 \tag{8.34}$$

$$|T|^2 = \frac{1}{4}\sum_{s_1, s_2, s_1', s_2'}\left|\frac{(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{u}\gamma^\mu u)}{q^2 + i\epsilon}\right|^2 \tag{8.35}$$

一般に，

$$\left|\bar{u}(\mathrm{f})\Gamma u(\mathrm{i})\right|^2 = \left[\bar{u}(\mathrm{f})\Gamma u(\mathrm{i})\right]\left[\bar{u}(\mathrm{i})\bar{\Gamma} u(\mathrm{f})\right] \tag{8.36}$$

であり，$\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma_0$ なので $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$ である．また，

$$\sum_s u_\beta(p, s)\bar{u}_{\beta'}(p, s) = \frac{1}{2m}(\not{p} + m)_{\beta\beta'} \tag{8.37}$$

なので，

$$\left|\bar{u}(\mathrm{f})\Gamma u(\mathrm{i})\right|^2 = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2m}(\not{p}_\mathrm{f} + m)\,\Gamma\,\frac{1}{2m}(\not{p}_\mathrm{i} + m)\,\bar{\Gamma}\right\} \tag{8.38}$$

であり，次式が得られる．

$$\begin{aligned}|T|^2 = \frac{e^4}{4q^4}&\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2m}(\not{p}_1' + m)\gamma^\mu\frac{1}{2m}(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu\right\}\\ &\times \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2m}(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu\frac{1}{2m}(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu\right\}\end{aligned} \tag{8.39}$$

トレースの計算には，次の公式が有用である．

$$\mathrm{Tr}(\not a \not b \not c \not d) = 4\left[(a\cdot b)(c\cdot d) + (a\cdot d)(c\cdot c) - (a\cdot c)(b\cdot d)\right] \tag{8.40}$$

$$\mathrm{Tr}(\not a \not b) = 4(a\cdot b), \quad \mathrm{Tr}(\not a \not b \not c) = 0 \tag{8.41}$$

これらの式は，ガンマ行列の性質に基づいて証明される．これにより，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2m}(\not p_1' + m)\gamma^\mu \frac{1}{2m}(\not p_1 + m)\bar{\gamma}^\nu\right\}\\ &= \frac{1}{m^2}\left((p_1')^\mu p_1^\nu + p_1^\mu (p_1')^\nu - g^{\mu\nu}(p_1'\cdot p_1 - m^2)\right)\end{aligned} \tag{8.42}$$

となり，最終的に次式が求まる．

$$|T|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\left[(p_1\cdot p_2')(p_1\cdot p_2) + (p_2'\cdot p_1)(p_2\cdot p_1') - m^2(p_2'\cdot p_2 + p_1\cdot p_1) + 2m^4\right] \tag{8.43}$$

8.3 Ward恒等式とゲージ不変性

8.3.1 Ward恒等式

Ward恒等式 (Ward identity) は，計算の過程においてゲージ不変性を保証するための手段を与える．式を導くために次の量を考える．

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle 0|\,T\left\{j^\mu(x)\bar{\psi}(y)\psi(z)\right\}|0\rangle \tag{8.44}$$

$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ はFermi粒子数のカレントである．カレント保存則 $\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0$ は相互作用を持つ系でも“演算子の恒等式”として成立するので，時間順序化によってもたらされる不連続を考慮すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle 0|\,T\left\{j^\mu(x)\bar{\psi}(y)\psi(z)\right\}|0\rangle &= \delta(x_0 - y_0)\langle 0|\,T\left\{\left[j^0(x), \bar{\psi}(y)\right]\psi(z)\right\}|0\rangle\\ &+\delta(x_0 - z_0)\langle 0|\,T\left\{\bar{\psi}(y)\left[j^0(x), \psi(z)\right]\right\}|0\rangle\end{aligned} \tag{8.45}$$

電荷密度 (粒子数密度) と，場の交換関係は次のようになる．

$$\begin{aligned}\delta(x_0 - y_0)\left[j^0(x), \bar{\psi}(y)\right] &= \bar{\psi}(y)\delta^4(x-y)\\ \delta(x_0 - z_0)\left[j^0(x), \psi(z)\right] &= -\psi(z)\delta^4(x-z)\end{aligned} \tag{8.46}$$

したがって次式が与えられる．

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle 0|\,T\left\{j^\mu(x)\bar{\psi}(y)\psi(z)\right\}|0\rangle &= \delta^4(x-y)\langle 0|\,T\left\{\bar{\psi}(y)\psi(z)\right\}|0\rangle\\ &-\delta^4(x-z)\langle 0|\,T\left\{\bar{\psi}(y)\psi(z)\right\}|0\rangle\end{aligned} \tag{8.47}$$

この恒等式は，自由場でも相互作用を持つ場でも成立する．自由場に関する証明は簡単である．自明な恒等式 $(\not{k}+\not{q}-m)-(\not{q}-m)=\not{k}$ から，

$$\frac{1}{\not{q}-m}k_\mu\gamma^\mu\frac{1}{\not{k}+\not{q}-m}=\frac{1}{\not{q}-m}-\frac{1}{\not{q}+\not{k}-m} \tag{8.48}$$

が導かれる．これは式(8.47)を運動量空間に移した式になっている．

相互作用を持つFermi粒子系のWard恒等式を，運動量空間の伝播関数 $S(k)$ と "既約な結節部分" (irreducible vertex) $\Gamma_\mu(q,k+q)$ を用いて示すことができる (図8.5で斜線を入れた円が，既約な結節部分を表す).

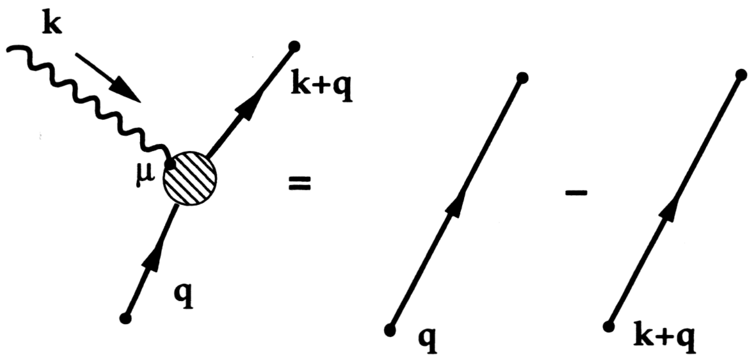


図 8.5 Ward恒等式.

$$k_\mu S(q)\Gamma^\mu(q,k+q)S(k+q)=S(q)-S(k+q) \tag{8.49}$$

あるいは，スピノル空間における $S(q)$ の逆行列 $S^{-1}(q)$ を用いて，上式を書き直すこともできる†.

$$S^{-1}(k+q)-S^{-1}(q)=k_\mu\Gamma^\mu(q,k+q) \tag{8.50}$$

8.3.2 応用

真空偏極泡

Ward恒等式の応用例として，光子の伝播関数に e^2 の次数の繰り込みを生じる真空偏極泡 (vacuum polarization bubble) を考察しよう．

†(訳註) この節で示されている恒等式(具体的には (8.48)-(8.50)) は，Ward-高橋の恒等式(WT恒等式) と呼ぶほうが適切であろう．J. C. Wardが1950年に示した恒等式は $k\to 0$ のときの微分式であって，1957年に高橋康がこの関係式を，ここで示されているような形に一般化した.

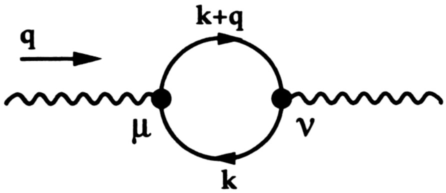


図 8.6 光子の偏極泡.

偏極泡は，次式で与えられる.

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\big(\gamma^\mu S(k+q)\gamma^\nu S(k)\big) \tag{8.51}$$

Ward恒等式により，次式が得られる.

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big(\operatorname{tr}\big(S(k)\gamma^\nu\big) - \operatorname{tr}\big(S(k+q)\gamma^\nu\big)\Big) \tag{8.52}$$

もし式(8.52)の第 1 項の積分変数を $k \to k+q$ のようにシフトできるならば，右辺はゼロになる (このような積分変数の変更は，常に安全性を保証できるものでは "ない" が，ここでは問題は生じない). このことから $\Pi^{\mu\nu}(q)$ の構造について情報が得られる. Lorentz 共変性により $\Pi^{\mu\nu}(q)$ は，

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} F_1(q^2) + q^\mu q^\nu F_2(q^2) \tag{8.53}$$

という形を持つので，$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$ は，

$$q^\nu F_1 + q^2 q^\nu F_2 = 0 \tag{8.54}$$

もしくは，

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = F_1(q^2)\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \tag{8.55}$$

を意味する. したがって泡は，ゲージを固定しない元の光子の伝播関数行列と同様に "横偏極" (transverse) である.

外場

Ward恒等式のもうひとつの応用として，電子と外場の相互作用におけるゲージ不変性を示す. ここでは $H_\mathrm{I} = \int d^3x\, eA_\mu^{\mathrm{ext}}(x) j^\mu(x)$ の形の相互作用を仮定する. 外場 $A_\mu^{\mathrm{ext}}(x)$ は，あらかじめ与えられており，電子からの影響を受けないものとする.

外場中の電子の伝播関数は，次の和の式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
iS_{A^{\rm ext}}(y,x) &= \langle 0|\,T\big\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\big\}|0\rangle_{A^{\rm ext}} \\
&= \sum_n \frac{(-ie)^n}{n!}\int d^4z_1\ldots d^4z_n A^{\rm ext}_{\mu_1}(z_1)\ldots A^{\rm ext}_{\mu_n}(z_n) \\
&\qquad\qquad \times \langle 0|\,T\big\{\psi(y)j^{\mu_1}(z_1)\ldots j^{\mu_n}(z_n)\bar{\psi}(x)\big\}|0\rangle \\
&= \sum_n \frac{(-ie)^n}{n!}\int d^4z_1\ldots d^4z_n A^{\rm ext}_{\mu_1}(z_1)\ldots A^{\rm ext}_{\mu_n}(z_n) \\
&\qquad \times iS(y,z_n)\gamma^{\mu_n} iS(z_n,z_{n-1})\gamma^{\mu_{n-1}}\ldots\gamma^{\mu_1} iS(z_1,x)
\end{aligned}
\tag{8.56}
$$

(結節点の入れ替え方法が $n!$ 通りなので $n!$ は消える.)

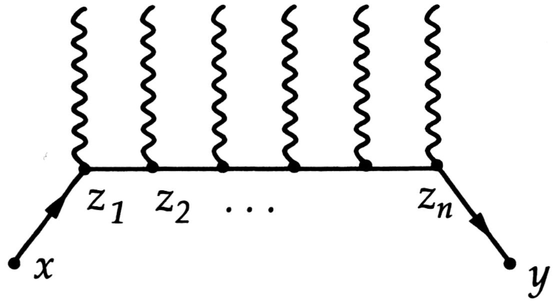


図 8.7 外場中の電子の伝播関数.

ここで外場 $A^{\rm ext}_\mu(x)$ を $A^{\rm ext}_\mu(x)+\partial_\mu\delta\Lambda(x)$ に置き換える．微小な $\delta\Lambda(x)$ の下では，式(8.47)を繰り返し用いることで，伝播関数の変化を求めることができる．

$$
\delta\langle 0|\,T\big\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\big\}|0\rangle_{A^{\rm ext}} = ie\big(\delta\Lambda(x)-\delta\Lambda(y)\big)\langle 0|\,T\big\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\big\}|0\rangle_{A^{\rm ext}} \tag{8.57}
$$

有限の Λ まで積分すると，伝播関数は，

$$
\langle 0|\,T\big\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\big\}|0\rangle_{A^{\rm ext}} \;\to\; e^{ie(\Lambda(x)-\Lambda(y))}\langle 0|\,T\big\{\bar{\psi}(x)\psi(y)\big\}|0\rangle_{A^{\rm ext}} \tag{8.58}
$$

のように，量子力学から予想される形の変更を受けることが分かる．

運動量空間では，伝播関数は次のような和で表される．

$$
S(p,p+k) = \sum_n (-ie)^n \left(\frac{1}{\not{p}+\sum\not{k}-m}\gamma^{\mu_n}\ldots\gamma^{\mu_1}\frac{1}{\not{p}-m}\right)\tilde{A}_{\mu_n}(k_n)\ldots\tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \tag{8.59}
$$

ここに式(8.48)を適用すると，運動量空間における伝播関数の変更は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{\not p+\sum \not k - k_n - m}\gamma^{\mu_{n-1}}\dots\gamma^{\mu_1}\frac{1}{\not p - m}\right)\delta\Lambda(k_n)\tilde{A}_{\mu_{n-1}}(k_{n-1})\dots\tilde{A}_{\mu_1}(k_1)\\
&+\left(\frac{1}{\not p+\sum \not k - m}\gamma^{\mu_n}\dots\gamma^{\mu_2}\frac{1}{\not p + \not k_1 - m}\right)\tilde{A}_{\mu_n}(k_n)\dots\tilde{A}_{\mu_2}(k_2)\delta\Lambda(k_1)
\end{aligned}
\tag{8.60}
$$

散乱振幅を求めるために，外線に伝播関数の代わりに $u(p)$ と $\bar{u}(p+\sum k)$ をあてることにする．

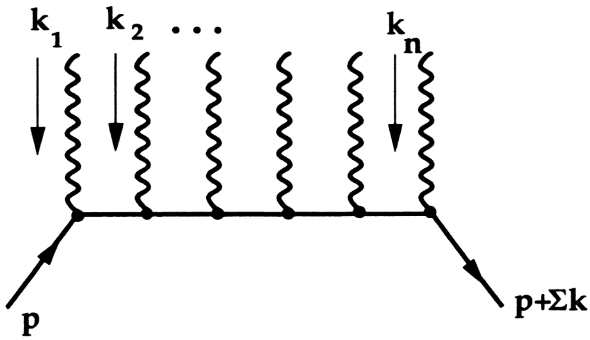


図 8.8 外場に散乱される電子．

このためには，右端に $S^{-1}(p)u(p)$，左端に $\bar{u}(p+\sum k)S^{-1}(p+\sum k)$ を置けばよい．元の振幅では $S(p)$ と $S^{-1}(p)$ が打ち消し合うので，ゼロにはならない．変化分 (8.60) の第 2 項において，$\dots S^{-1}(p)u(p)$ の形で $S^{-1}(p)$ が相殺されずに残るが，$S^{-1}(p)u(p) = (\not p - m)u(p) = 0$ である．同様に第 1 項でも $\bar{u}(p+\sum k)S^{-1}(p+\sum k) = 0$ である．したがってゲージ変換によって伝播関数は変わっても，散乱振幅は変わらない．

第 9 章　固体中の電子

ここからの 2 つの章では非相対論的な多体の物理を扱う．前章までに見てきた Wick の定理や Feynman ダイヤグラムなどの基本概念は，少し修正を施すだけで非相対論的な多体系にも応用できる．主たる繁雑さは Lorentz 不変性の欠如によって，運動量とエネルギーを 4 元ベクトルに統合できないことに起因する．

多体系には，それを記述するのに都合の良い座標系が，少なくともひとつある．それは多体の重心が静止している座標系である．エネルギー $\hbar\omega$ と運動量 $\hbar\mathbf{k}$ に関係する物理量の振舞いは，ω が大きく $\mathbf{k}$ が小さい場合と，これと逆の場合とで，かなり異なる．ω と $\mathbf{k}$ の全域を単一の近似で扱うことは困難であり，計算手法は相対論的な場の理論ほど一貫したものにはならない．しかしその一方で，非相対論的多体系は，物理過程に対する直観的な理解が容易であるという側面も持っている．

9.1　第二量子化

Fermi 粒子系の Hilbert 空間の復習から始めよう．前章までこの問題をあまり明示せずにきたが，“場”よりも“粒子”の物理に改めて注目するために，ここで再考してみる．

多電子系を扱うための Hilbert 空間は，単一電子の Hilbert 空間の反対称な (外積) テンソル冪（べき）で構成される．純粋に形式的なこの抽象空間の構築方法は“第二量子化” (second quantization) という少々誤解を招きやすい術語で呼ばれている．

単一電子について，ハミルトニアン，

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(x) \tag{9.1}$$

の下での，規格化されたエネルギー固有関数系 $\psi_n(x)$ が分かっているものとする．これらの関数は，

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{9.2}$$

を満たし，単一電子の Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{(1)}$ において完全正規直交系を構成する．演算

子 $\hat{a}_n$ と $\hat{a}_n^\dagger$ が反交換関係,

$$\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger\} = \delta_{mn} \tag{9.3}$$

を満たし, “第二量子化” された電子場を表す Heisenberg場が次のように定義されるものとする.

$$\hat{\psi}(x,t) = \sum_n \hat{a}_n \psi_n(x) e^{-iE_n t} \tag{9.4}$$

この場は次の反交換関係を持つ.

$$\left\{\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^\dagger(x',t)\right\} = \delta^3(x-x') \tag{9.5}$$

ラグランジアン密度として次の式を採用すると, 上の反交換関係が自然な要請として現れる.

$$\mathcal{L} = i\hat{\psi}^\dagger \partial_t \hat{\psi} - \frac{1}{2m}|\nabla\hat{\psi}|^2 - \hat{\psi}^\dagger V(x)\hat{\psi} \tag{9.6}$$

この式から $\hat{\psi}$ に共役な運動量は $\hat{\pi}(x) \equiv i\hat{\psi}^\dagger(x)$ であることが読み取れる. Fermi統計に従うように共役変数に反交換関係を課すると, 式(9.5)が得られる.

演算子 $\hat{\psi}(x,t)$ や $\hat{\psi}^\dagger(x,t)$ は “大きな” 多粒子空間,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \left\{ \bigwedge^N \mathcal{H}^{(1)} \right\} \tag{9.7}$$

に作用する. これは単一粒子の Hilbert空間 $\mathcal{H}^{(1)}$ の各 N 次の外積冪の総和である. それぞれの N 粒子空間 $\bigwedge^N \mathcal{H}^{(1)}$ は, 次のように作られる.

$$|m_1, m_2, \ldots\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{m_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{m_2}\ldots|0\rangle \tag{9.8}$$

$|0\rangle$ は粒子のない状態で, 任意の $\hat{a}_i$ によって消滅する. また $\sum m_i = N$ である. $(\hat{a}_i^\dagger)^2 = 0$ なので, m_i は 1 もしくは 0 の値だけを取り得る.

“第二量子化” したハミルトニアンを次のように書く.

$$\hat{H} = \int d^3x\, \hat{\psi}^\dagger(x) H \hat{\psi}(x) = \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger a_n \tag{9.9}$$

このハミルトニアンの $\bigwedge^1 \mathcal{H}^{(1)}$ への作用は, H の $\mathcal{H}^{(1)}$ への作用と整合する.

粒子数演算子は,

$$\hat{Q} = \int d^3x\, \hat{\rho}(x) = \int d^3x\, \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \tag{9.10}$$

であり, 粒子流密度は次のように与えられる.

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2mi}\left(\hat{\psi}^\dagger \nabla\hat{\psi} - (\nabla\hat{\psi}^\dagger)\hat{\psi}\right) \tag{9.11}$$

$\hat{H}$ の下で，演算子の関係式として，次の連続の方程式が得られる．

$$\partial_t \hat{\rho} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0 \tag{9.12}$$

通常の 1 粒子波動関数との関係を見るために，1 粒子状態 $|m\rangle = \hat{a}_m^\dagger|0\rangle$ を考えよう．次の行列要素を評価すると，波動関数が現れる．

$$\langle 0|\hat{\psi}(x,t)|m\rangle = \langle 0|\sum_n a_n^\dagger \psi_n(x) e^{-iE_n t}\hat{a}_m^\dagger|0\rangle = \psi_m(x)e^{-iE_m t} \tag{9.13}$$

更に $|\Psi_0\rangle$ を，エネルギーの低い方から N 個の粒子を埋めた，N 粒子基底状態とすると，

$$\langle 0|\prod_{i=1}^{N}\hat{\psi}(x_i)|\Psi_0\rangle = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \cdots & \psi_N(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_N) & \psi_2(x_N) & \cdots & \psi_N(x_N) \end{vmatrix} \tag{9.14}$$

である．右辺は多体の基底状態を表す Slater 行列式としてよく知られている．

$N \times N$ の Slater 行列式で表すことのできる N 粒子状態を“分解可能 (decomposable) な状態”と言う．このような状態は，すべての N 粒子状態の中で，ごく小さい部分集合を構成する．N 粒子系に対する Hartree-Fock の近似計算は，この部分集合の中から最良の試行波動関数を選ぶ作業にあたる．

Schrödinger の波動関数 $\psi(x)$ を場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ に読み替えるアイデアの基本的な部分は Jordan[1] によって与えられた．

ここまでで予想されるように，時間順序積と正規積はマイナス符号のついた形で定義される．

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x')\}|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \theta(x_0 - x_0')\langle 0|\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x')|0\rangle - \theta(x_0' - x_0)\langle 0|\hat{\psi}(x')\hat{\psi}^\dagger(x)|0\rangle \tag{9.15}$$

[1] Ernst Pascual Jordan:1902 年 10 月 18 日 Hannover (ドイツ) 生まれ．1980 年 7 月 31 日 Hannover にて死去．

9.2 Fermi気体とFermi液体

9.2.1 1粒子密度行列

$V = 0$であり，系が十分大きい場合，式(9.4)の和を積分に置き換えることができる．

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\varepsilon(\mathbf{k})t} \tag{9.16}$$

これ以降，1粒子波動関数 $\psi_n(x)$ をあらわに扱うことはないので，場の演算子のハット記号「ˆ」を省略する．相対論的な規格化は必要でないことに注意されたい．したがって，上式にも $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の反交換関係にも $\dfrac{1}{2E}$ の因子は付かない．

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{9.17}$$

単一粒子のエネルギー $\varepsilon(\mathbf{k})$ は，次式で与えられる．

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2m}\mathbf{k}^2 \tag{9.18}$$

上記の1粒子エネルギーの代わりに $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\mathrm{f}}$ という量が用いられる場合もある．$\varepsilon_{\mathrm{f}} = \varepsilon(\mathbf{k}_{\mathrm{f}})$ はFermiエネルギーである．多粒子系の基底状態 $|\Psi_0\rangle$ はFermiエネルギー以下の1粒子状態がすべて占有された“Fermiの海”(Fermi sea)となるが，これは $\xi_{\mathbf{k}}$ が負の準位がすべて満たされた状態にあたるので，Fermiの海と相対論的なDiracの海との間に，ある程度の類推関係が成立する．しかしFermiの海の“空孔”は“負の質量”を持つことに注意されたい．負の $\xi_{\mathbf{k}}$ の“海”から運動量 $-\mathbf{k}$ の電子を取り去ったときに生じる空孔は，正のエネルギー $|\xi_{\mathbf{k}}|$，運動量 $\mathbf{k}$，速度 $\mathbf{v} = -\mathbf{k}/m$ を持つ．したがって空孔の速度と運動量は“逆向き”である[2)]．

全粒子数は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} N &= 2 \times (\mathrm{Vol}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \theta\big(\varepsilon_{\mathrm{f}} - \varepsilon(\mathbf{k})\big) \\ &= 2 \times (\mathrm{Vol}) \times \frac{4}{3}\pi(k_{\mathrm{f}})^3 \frac{1}{(2\pi)^3} = 2 \times (\mathrm{Vol}) \times \frac{1}{6\pi^2}(k_{\mathrm{f}})^3 \end{aligned} \tag{9.19}$$

(2× は，各準位に2つのスピン状態があることによるものである．)

したがって粒子数密度は，次式で示される．

$$\rho = 2 \times \frac{k_{\mathrm{f}}^3}{6\pi^2} \tag{9.20}$$

2) 半導体においてエネルギーギャップの下の価電子帯 (valence band) に生じる空孔 (正孔) は正の質量を持つので，半導体中の電子の“海”は，通常の自由Fermi粒子系よりもDiracの海の描像に近いものになる．

伝播関数を次のように定義する．

$$iG_{\alpha\beta}(x,x') = \langle\Psi_0|\,T\big\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(x')\big\}|\Psi_0\rangle \tag{9.21}$$

添字 α,β はスピン成分を表す．慣例に倣い，定義式に i を入れて，非摂動の伝播関数が Schödinger 方程式の Green 関数に一致するようにしてある．

$$\Big(i\partial_t + \frac{1}{2m}\partial^2\Big)G_{\alpha\beta}(x,x') = \delta^4(x-x')\delta_{\alpha\beta} \tag{9.22}$$

$G_{\alpha\beta}$ が Green 関数であれば，その Fourier 変換，

$$G_{\alpha\beta}(x,0) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{9.23}$$

に関して $\big(\omega-\epsilon(\mathbf{k})\big)G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)=\delta_{\alpha\beta}$ でなければならない．定義式(9.21)から次式が得られる．

$$\begin{aligned}
iG_{\alpha\beta}(x,x') &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big\{\theta(t-t')\langle\Psi_0|\hat a_{\mathbf{k}}\hat a_{\mathbf{k}}^\dagger|\Psi_0\rangle \\
&\qquad -\theta(t'-t)\langle\Psi_0|\hat a_{\mathbf{k}}^\dagger\hat a_{\mathbf{k}}|\Psi_0\rangle\Big\}\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\varepsilon(\mathbf{k})(t-t')} \\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big\{\big(\theta(t-t')\theta(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm f})-\theta(t'-t)\theta(k_{\mathrm f}-|\mathbf{k}|)\big\} \\
&\qquad \times e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\varepsilon(\mathbf{k})(t-t')}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

ここから $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ が，

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{\omega-\varepsilon(\mathbf{k})+i\epsilon\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm f})}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{9.25}$$

と求まるが，これはまさに $\big(\omega-\epsilon(\mathbf{k})\big)G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)=\delta_{\alpha\beta}$ を満足する．

粒子密度の計算を行うことで，式(9.25)に現れた新しい"$i\epsilon$ の処方"の正当性を確認してみよう．簡単のために，スピンを省いて考える．評価したいのは次式である．

$$\langle\Psi_0|\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)|\Psi_0\rangle = -\lim_{\tau\to0+}\langle\Psi_0|\,T\big\{\psi(\mathbf{x},t)\psi^\dagger(\mathbf{x},t+\tau)\big\}|\Psi_0\rangle \tag{9.26}$$

これは次のようになる．

$$-\lim_{\tau\to0+}\left\{\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{i}{\omega-\varepsilon(\mathbf{k})+i\epsilon\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm f})}\,e^{i\omega\tau}\right\} \tag{9.27}$$

$\tau>0$ なので Jordan の補助定理により ω の積分路を上半面にとることができる．極 $\omega=\varepsilon(\mathbf{k})-i\epsilon\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm f})$ は，$|\mathbf{k}|<k_{\mathrm f}$ のときだけ積分路の中に入り，$2\pi i$ の寄与を持つ．したがって積分の結果，

$$\rho = -i\frac{2\pi i}{2\pi}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\theta(k_{\mathrm f}-|\mathbf{k}|) \tag{9.28}$$

となり，正しい密度の式が与えられる．これ以降 $\epsilon\,\mathrm{sgn}(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm{f}})$ を略して $\epsilon(|\mathbf{k}|-k_{\mathrm{f}})$ と書くことにする．

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が離れているものとすると，

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0|\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x}',t)|\Psi_0\rangle &= -\lim_{\tau\to 0^+}\langle\Psi_0|T\{\psi(\mathbf{x},t)\psi^\dagger(\mathbf{x}',t+\tau)\}|\Psi_0\rangle \\ &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}n(\mathbf{k}) \end{aligned} \tag{9.29}$$

$$n(\mathbf{k}) = \langle\Psi_0|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Psi_0\rangle = \theta(k_{\mathrm{f}}-|\mathbf{k}|) \tag{9.30}$$

と書ける．したがって“1粒子密度行列”$\langle\Psi_0|\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x}',t)|\Psi_0\rangle$ を $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ についてFourier変換すると，運動量空間における粒子密度分布が与えられる．このことは，相互作用を持つ粒子系でも成立する．

実際の電子系の運動量空間における分布は“角度分解光電子放出”(angle-resolved photoemission) によって測定することができる．これはシンクロトロン光を試料に照射して，放出される電子の運動量を分析する方法である．この過程において運動量 $\mathbf{k}$ は保存されるが，電子をたたき出す光の波長は数百Å程度でよく，光の運動量は電子の運動量 (波長は格子定数の程度，数Å) に比べて無視できる．

相互作用のないFermi粒子の集合体は“Fermi気体”(Fermi gas) と呼ばれる．Landau[3)]は強い相互作用を持つ電子系であっても，多くの場合，これと似た“Fermi液体”(Fermi liquid) の描像が成立することを示した．Fermi液体は，ほとんど自由な“準粒子”(quasiparticle) の集合体のように扱うことができ，その性質はFermi気体とよく似ている．これが固体物理において単一電子の描像が多大な成果を上げたことの理由である．Landauの元々の議論は，Fermi面 (Fermi surface) 付近における散乱過程において，利用できる相空間内の状態が制約されるという考え方に基づくものである．このことを現代的な言い方に直すと，前方散乱はほとんど，繰り込み群の見地からは“無効”(irrelevant) だということである．

Fermi液体においても，$\varepsilon<\varepsilon_{\mathrm{f}}$ のエネルギーを持つすべての状態が占有されていることに変わりはない．しかし運動量の分布で見ると，$|\mathbf{k}|<k_{\mathrm{f}}$ の状態がすべて完全に占有されることには“ならない”．$n(\mathbf{k})$ は k_{f} において“不連続”(discontinuity) を生じるが，その大きさ Z は，$G(\mathbf{k},\omega)$ のLehmann表示におけるFermi準位の項

[3)] Lev Davidovich Landau：1908年1月22日 Baku, Azerbaijan (帝政ロシア) 生まれ．1968年4月1日 Moscow (ソ連) にて死去．1962年ノーベル物理学賞．

の重み (スペクトル密度) にあたる.

$$G(\mathbf{k},\omega) = \frac{Z}{\omega - \varepsilon(\mathbf{k}) + i\epsilon(|\mathbf{k}| - k_{\mathrm{f}})} + \text{other excitations} \tag{9.31}$$

通常どおり $Z < 1$ である.

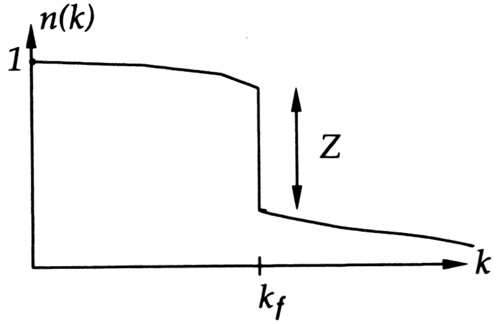


図 9.1　Fermi液体における電子の運動量の分布.

9.2.2　線形応答

半古典的Boltzmann方程式

系が含む不均一性の波長成分が, p_{f} に相当する波長に比べて十分長い場合, 前節の $n(\mathbf{p})$ を運動量 $\mathbf{p}$ と位置 $\mathbf{x}$ に対する分布関数 $n(\mathbf{p},\mathbf{x},t)$ に直すことができる. もちろん, このような取り扱いは, 不確定性原理の制約のため, 一般に可能なものではない. ここで扱う緩やかな分布 $n(\mathbf{p},\mathbf{x},t)$ は, 半古典的な概念である.

Boltzmann方程式は, $n(\mathbf{p},\mathbf{x},t)$ に関する連続方程式である.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} n + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} n = I(n) \tag{9.32}$$

ここで,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{p}} \tag{9.33}$$

は, Hamiltonの射線の理論によって与えられる $\mathbf{p}$ の変化率と群速度である. エネルギー $\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{x})$ を, 単純に次のように与える.

$$\varepsilon(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \frac{1}{2m}|\mathbf{p}|^2 + V(x) \tag{9.34}$$

Liouvilleの定理により，

$$\nabla_{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{v_p}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v_x}=0 \tag{9.35}$$

なので，式(9.32)は，次のように書き直せる．

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{p}}\cdot n\mathbf{v_p}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot n\mathbf{v_x}=I(n) \tag{9.36}$$

こうすると，密度保存の式 $\partial_t\rho+\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0$ との関係が明確になってくる．通常の密度保存の式との違いは右辺の $I(n)$ で，これは粒子が $\mathbf{p}$ 状態から他の状態に散乱される頻度を表す衝突項である．この散乱はエントロピーを生じる．まず当面は衝突項を無視して，コヒーレントな集団効果を考察する．衝突項を省いたBoltzmann方程式は，しばしば“Vlasov方程式”と呼ばれる．

粒子密度の平衡値からのずれを考察しよう．$n=n_0+\delta n$ とおく．$n_0=\theta(k_\mathrm{f}-|\mathbf{p}|)$ である．$\partial_t n_0=0$，$\nabla_{\mathbf{x}}n_0=0$ であり，$\nabla_{\mathbf{p}}n_0$ は $|\mathbf{p}|=k_\mathrm{f}$ のところにデルタ関数を含む．

$$\nabla_{\mathbf{p}}n_0=\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}=-\delta(|\mathbf{p}|-k_\mathrm{f})\frac{\mathbf{v_x}}{v_\mathrm{f}} \tag{9.37}$$

式(9.32)を摂動論的に解くには，$\partial_t n$ と $\nabla_{\mathbf{x}}n$ の項には δn だけが必要で，$\nabla_{\mathbf{p}}n$ の項だけに n_0 を残せばよい．δn のFourier変換を，

$$\delta n(\mathbf{p},\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\delta\tilde{n}(\mathbf{p},\mathbf{k},\omega) \tag{9.38}$$

と書くと，次式が得られる．

$$-i\omega\delta\tilde{n}+i\tilde{V}(\mathbf{k},\omega)\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v_x}}{v_\mathrm{f}}\delta(|\mathbf{p}|-k_\mathrm{f})+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v_x}\delta\tilde{n}=0 \tag{9.39}$$

$\tilde{V}(\mathbf{k},\omega)$ は $V(x)$ をFourier変換したものである．上式は次のように書き直せる．

$$(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v_x})\,\delta\tilde{n}(\mathbf{p},\mathbf{k},\omega)=\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v_x}}{v_\mathrm{f}}\delta(|\mathbf{p}|-k_\mathrm{f})\tilde{V}(\mathbf{k},\omega) \tag{9.40}$$

これを見ると，δn はFermi面のところだけでゼロでなくなることが分かる．この式を解釈するには $\mathbf{v_x}=\mathbf{p}/m$ を併せて考えればよい．

9.2.3 ダイヤグラムの方法

場の理論から式(9.40)を導くこともできる．

n_0 を,

$$\begin{aligned} n_0(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \int d^3y \langle\Psi_0| T\left\{\psi^\dagger\left(\mathbf{x}+\tfrac{1}{2}\mathbf{y}, t+\epsilon\right)\psi\left(\mathbf{x}-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}, t\right)\right\}|\Psi_0\rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \\ &= -i\int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{y}}e^{i\epsilon\omega}}{\omega-\varepsilon(\mathbf{q})+i\epsilon(|\mathbf{q}|-q_{\mathrm{f}})} \\ &= \theta(|\mathbf{p}|-p_{\mathrm{f}}) \end{aligned} \tag{9.41}$$

と書き, 空間と時間に対してゆるやかな $V(\mathbf{x},t)$ による, $V(\mathbf{x},t)\psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)$ の摂動を考察しよう.

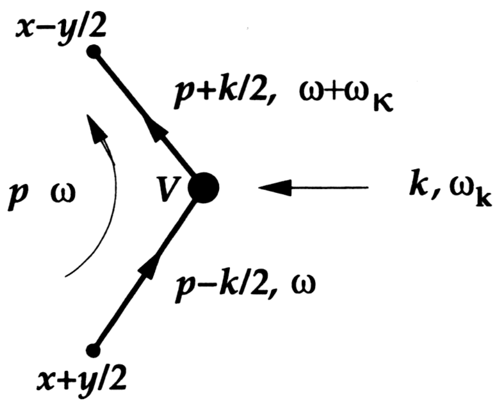


図 9.2 運動量分布関数 $n(\mathbf{p},\mathbf{x},t)$ に対する V の 1 次摂動. 変数 $\mathbf{k}$ および $\omega_{\mathbf{k}}$ は, それぞれ $\mathbf{x}$ および t の Fourier 共役変数である.

Fourier変換によって変数を $\mathbf{x}$, t から $\mathbf{k}$, $\omega_{\mathbf{k}}$ にすると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} &\delta\tilde{n}(\mathbf{p},\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}) \\ &= \int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{-i}{\omega+\omega_{\mathbf{k}}-\varepsilon\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)+i\epsilon\left(|\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}|-p_{\mathrm{f}}\right)} \\ &\qquad\times\left(-i\tilde{V}(\mathbf{k},\omega)\right)\frac{i}{\omega-\varepsilon\left(\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)+i\epsilon\left(|\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}|-p_{\mathrm{f}}\right)}e^{i\epsilon\omega} \\ &= -i\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\tilde{V}(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}})}{\omega_{\mathbf{k}}-\left\{\varepsilon\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)-\varepsilon\left(\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)\right\}} \\ &\qquad\times\left[\frac{1}{\omega-\varepsilon\left(\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)+i\epsilon\left(|\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}|-p_{\mathrm{f}}\right)}\right. \\ &\qquad\qquad\left.-\frac{1}{\omega+\omega_{\mathbf{k}}-\varepsilon\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\right)+i\epsilon\left(|\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}|-p_{\mathrm{f}}\right)}\right]e^{i\epsilon\omega} \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{\omega_{\mathbf{k}} - \left\{\varepsilon\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) - \varepsilon\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right)\right\}} \left[n_0\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) - n_0\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right)\right] \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \tag{9.42}$$

(最後の 2 つの式で，$i\epsilon$ をいくつか省略した．これらは後で注意を向ける必要が出てくるが，当面は重要ではない.) ここまでは V の 1 次摂動というだけで，それ以上の近似を施していない．ここで V の空間的な変化がゆるやかで，$\mathbf{k}$ が大きくならないという条件を用いると，式(9.42) は次のように近似される．

$$\delta n(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}\, \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}\, \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\, \tilde{V}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \tag{9.43}$$

これと，

$$\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\rm f}) = -\frac{1}{v_{\rm f}}\delta(|\mathbf{p}| - p_{\rm f}) \tag{9.44}$$

を併せると，半古典的な Boltzmann 方程式が得られる．

9.2.4 応用

この節では式(9.43) の応用例を紹介する．ここで示したいのは，場の理論だけから計算できるような例ではなく，他の方法から得られるような物理的な記述が，場の理論からも再現できるという例である．これを行う理由は，読者が文献においてダイヤグラムを用いた計算を見るときに，その計算の背後にある物理現象を把握できるようになってもらうためである．

多くの応用例において，粒子ー空孔泡 (電子ー正孔泡)，

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = -\left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{p})\}} \Big[n_0(\mathbf{p}+\mathbf{k}) - n_0(\mathbf{p})\Big]\right) \tag{9.45}$$

を用いる．小さい $\mathbf{k}$ の極限で，被積分関数は次のように近似される．

$$-\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}\, \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}\, \frac{1}{v_{\rm f}}\, \delta(|\mathbf{p}| - p_{\rm f}) \tag{9.46}$$

特に，次の式を活用する．

$$\delta\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = \Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})\tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \tag{9.47}$$

式(9.45) で $\omega_{\mathbf{k}} = 0$ とおいたものは，Lindhard 関数と呼ばれている．これを $\chi(\mathbf{k})$ と記す．積分は正確に実行できて，次式が与えられる．

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{mk_{\rm f}}{2\pi^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right] \tag{9.48}$$

ここで $x = k/(2k_{\rm f})$ である．$x = 0$ のとき括弧の中が 1 になることに注意されたい．

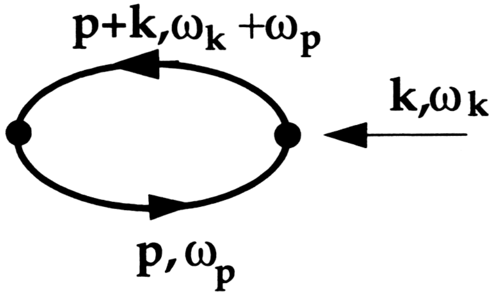


図 9.3 電子－正孔泡 $\Pi(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}})$.

Debye遮蔽

最初の例はDebye-Hükel遮蔽，すなわち電子気体による，電荷の静的な (すなわち $\omega_{\mathbf{k}} = 0$ の) 遮蔽の問題である．遮蔽がない場合，単位電荷量を持つ点電荷によるCoulombポテンシャルは，

$$\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{9.49}$$

であり，このFourier変換は次のようになる．

$$\tilde{\phi}_0(\mathbf{k}) = \int d^3x \, \frac{1}{4\pi r} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \tag{9.50}$$

ゆっくり変化するポテンシャルに電子気体が引っぱられたり斥けられたりすることで，電子気体の密度分布が変わる．この密度の変化をThomas-Fermi近似で見積もってみよう．

$$\delta\rho(x) = \left.\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{f}}} e\phi(x) = e\frac{mk_{\mathrm{f}}}{\pi^2}\phi(x) \tag{9.51}$$

ここでは式(9.20)と，$\mu = \varepsilon_{\mathrm{f}} = \dfrac{1}{2}mk_{\mathrm{f}}^2$，$\rho_0 = k_{\mathrm{f}}^3/3\pi^2$ の関係を用いた．

一様な電子気体の電荷は，背景として存在する一様なイオン電荷によって打ち消されるので，何らかの効果をもたらすのは電子密度の “ 変化分 ” である．ここでは長波長の効果だけに関心があるので，背景のイオン電荷も空間全体に一様に拡がっていると考える (電子気体の背景に正電荷が一様に分布する模型をジェリウムモデル jellium modelという)．

密度の変化をPoisson方程式 $-\nabla^2\phi = (-e)\rho$ に導入すると，次式を得る．

$$-\nabla^2\phi = -\left.\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{f}}} e^2\phi \tag{9.52}$$

このことはCoulombポテンシャルが遮蔽されて，次のようになることを意味する．

$$\phi(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}') d^3 r' \tag{9.53}$$

$$g(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{4\pi r} e^{-r\sqrt{e^2 \frac{\partial \rho}{\partial \mu}}} = \frac{1}{4\pi r} e^{-k_0 r} \tag{9.54}$$

g のFourier変換は，

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + e^2 \dfrac{\partial \rho}{\partial \mu}} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + k_0^2} \tag{9.55}$$

である．k_0 は次のように表される．

$$k_0^2 = e^2 \frac{\partial \rho}{\partial \mu} = e^2 \frac{\partial \rho}{\partial k_{\mathrm{f}}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{f}}}{\partial k_{\mathrm{f}}} \right)^{-1} = \frac{e^2}{\pi^2} m k_{\mathrm{f}} \tag{9.56}$$

同じ結果は，次のような一連のダイヤグラムを，静的な効果だけを考慮するために $\omega_{\mathbf{k}}$ 一式をゼロとおいて足し合わせて得ることもできる．

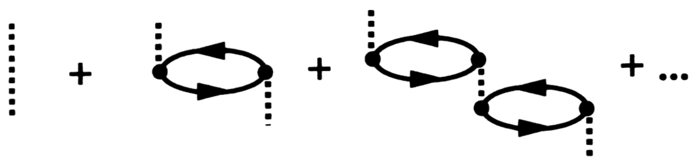


図 9.4 Debye-Hükel遮蔽を与える一連のダイヤグラム．垂直な破線は時間遅延のないCoulomb相互作用を表す．

これらのダイヤグラムによって，次式が与えられる．

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \left[1 - \frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{v_{\mathrm{f}}} \delta(|\mathbf{p}| - p_{\mathrm{f}}) + \dots \right] \tag{9.57}$$

括弧の中の ... には等比級数が続く．ここで，

$$\frac{1}{v_{\mathrm{f}}} \delta(|\mathbf{p}| - p_{\mathrm{f}}) = \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{f}}) \tag{9.58}$$

および，

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{f}}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathrm{f}}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(\varepsilon_{\mathrm{f}} - \varepsilon) = \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\mathrm{f}}} \tag{9.59}$$

の関係を用いることで，予想通りの $\tilde{g}$ の表式が得られる．

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} \frac{1}{1 + \dfrac{e^2}{\mathbf{k}^2} \dfrac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\mathrm{f}}}} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + e^2 \dfrac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{\mathrm{f}}}} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + k_0^2} \tag{9.60}$$

したがって長波長の近似はThomas-Fermi理論と等価である．

外部電荷がデルタ関数型の点源である場合，滑らかなThomas-Fermiの応答関数はよい近似ではないので，正確な結果を得るためには，元のLindhard関数を用いなければならない．対数項の $|\mathbf{k}| = 2k_\mathrm{f}$ における特異性によって，遠方で減衰する球面波状のポテンシャルが加わる．

$$\phi(r) \approx \frac{1}{r^3}\cos 2k_\mathrm{f} r \tag{9.61}$$

これはFriedel振動 (Friedel oscillation) と呼ばれている．

プラズマ振動

次にプラズマ振動 (plasma oscillation) を考察する．これは電子密度の動的な振動である．振動を起こすのは，電荷の中性が破れたときに発生する電場である．ここでもまず古典的な理論を見てみよう．荷電粒子系の小さな密度ゆらぎを考える．各粒子はNewtonの運動方程式に従う．

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{-e}{\mathbf{E}} \tag{9.62}$$

また，電場はGaussの法則から決まる．

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = (-e)(\rho - \rho_0) \tag{9.63}$$

ゆらぎの振幅が小さければ，連続の方程式，

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{9.64}$$

において $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ を $\rho_0\mathbf{v}$ と近似することができる．この近似の下で，

$$\partial_t(e\mathbf{j}) = \frac{e^2}{m}\rho_0\mathbf{E} \tag{9.65}$$

となる．ベクトル場の発散をとると，次式が得られる．

$$\ddot{\rho} + \frac{e^2\rho_0}{m}(\rho - \rho_0) = 0 \tag{9.66}$$

密度は“プラズマ振動数”(plasma frequency) $\omega_\mathrm{p}^2 = e^2\rho_0/m$ で振動する．この純粋に古典的なモデルの下では振動数が波長に依存しないので，“プラズモン”(plasmon) モードの群速度はゼロである．しかし後から見るようにFermiの海の存在を考慮すると，この伝播性の欠如した描像は修正されることになる．

ダイヤグラムからプラズモンがどのように現れるかを見てみよう．プラズマ振動は$\mathbf{k}=0$でもゼロでない振動数を持つので，$kv_{\mathrm{f}} \ll \omega$の領域を考察することにも意味がある．この条件下で電子ー正孔泡を$v_{\mathrm{f}}k/\omega$の冪に展開する．

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{v_{\mathrm{f}}}\delta(|\mathbf{p}|-p_{\mathrm{f}})\frac{\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}} \\
&\quad = \frac{\partial\rho}{\partial\mu}\int\frac{d\Omega_{\mathrm{p}}}{4\pi}\frac{\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}}\left(1+\frac{\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}}+\left(\frac{\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^3+\dots\right) \\
&\quad = \frac{\partial\rho}{\partial\mu}\left(\frac{v_{\mathrm{f}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2}\frac{\mathbf{k}^2}{3}+\left(\frac{v_{\mathrm{f}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2}\right)^2\frac{(\mathbf{k}^2)^2}{5}+\dots\right)
\end{aligned} \tag{9.67}
$$

この式を得るために，以下の関係式を用いた．

$$
\frac{1}{v_{\mathrm{f}}^2}\int\frac{d\Omega_{\mathrm{p}}}{4\pi}v_\alpha v_\beta = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \tag{9.68}
$$

$$
\frac{1}{v_{\mathrm{f}}^4}\int\frac{d\Omega_{\mathrm{p}}}{4\pi}v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \tag{9.69}
$$

［$\mathbf{v}=\mathbf{v}(p)=\mathbf{p}/m$を念頭に置くこと．］また$\mathbf{v}$の奇数乗の項の平均はゼロになる．

式(9.67)の第1項だけを残すと，図9.4の泡の和は次式で表される．

$$
\frac{e^2}{\mathbf{k}^2}\frac{1}{1-\dfrac{e^2}{\mathbf{k}^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial\mu}\dfrac{v_{\mathrm{f}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2}\dfrac{\mathbf{k}^2}{3}} \tag{9.70}
$$

ここで$\rho \propto \varepsilon_{\mathrm{f}}^{3/2}$より，

$$
\left.\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{f}}} = \frac{3}{2}\frac{\rho_0}{\varepsilon_{\mathrm{f}}} = \frac{3\rho_0}{mv_{\mathrm{f}}^2} \tag{9.71}
$$

なので，式(9.70)の極は，

$$
1 = e^2\frac{3\rho_0}{mv_{\mathrm{f}}^2}\frac{v_{\mathrm{f}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2}\frac{1}{3} = \frac{\rho_0 e^2}{m\omega_{\mathbf{k}}^2} \tag{9.72}
$$

を満たす振動数のところに生じるが，これは古典的に求めたプラズマ振動数$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2 = \rho_0 e^2/m$と正確に一致する．

式(9.67)の第2項までを残し，$1/\omega_{\mathbf{k}}^4$を$1/(\omega_{\mathbf{k}}^2\omega_{\mathrm{p}}^2)$と近似すると[4]，極の位置が次のように求まる．

$$
\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_{\mathrm{p}}^2 + \frac{3}{5}v_{\mathrm{f}}^2 k^2 + \dots \tag{9.73}
$$

$\mathbf{k}$に関して更に高次の展開をしてもあまり意味がない．電子と正孔が中間状態から実粒子状態に移れる十分なエネルギーがあれば，プラズモン励起は不安定になり，電子ー正孔連続体の共鳴状態に移行するからである．これを図9.5に示す．

[4] こうしないと$\omega_{\mathbf{k}}^2$について2次方程式を解く必要が生じる．この近似の下でω_{p}^2付近にある解を$O(k^2)$の精度で求めることができる．

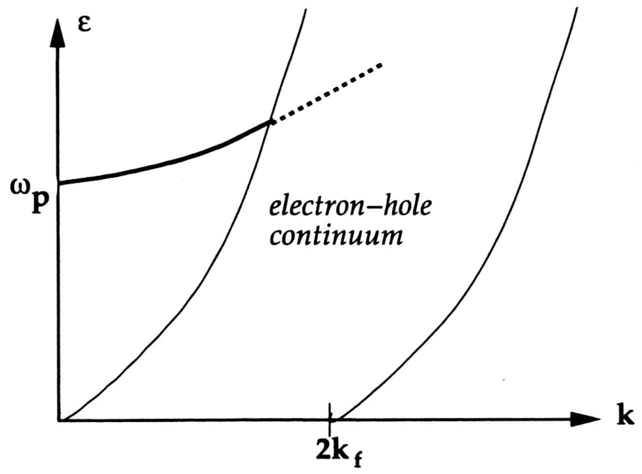


図 9.5　プラズモンは最終的に電子ー正孔連続体の共鳴に移行する.

図 9.5 には $\omega - \mathbf{k}$ 面において電子ー正孔励起が生じる領域の境界線も示してある. 2つの境界線は $\omega = \varepsilon(k) \pm kv_{\mathrm{f}}$ と与えられ, それぞれ図 9.6 の 2 つの図に示すような励起に対応する.

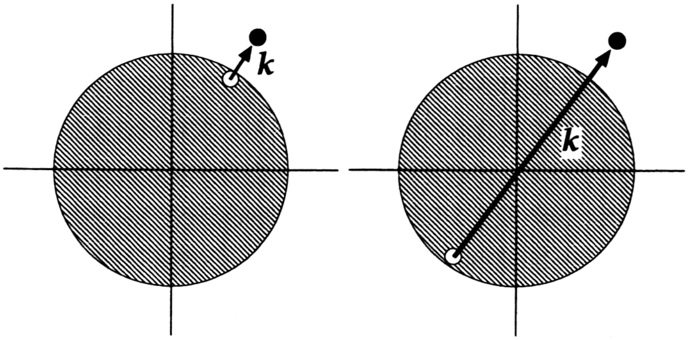


図 9.6　与えられたエネルギーの下で最小と最大の k を持つ電子ー正孔励起.

Landau減衰

プラズモンの分散曲線 $\omega(\mathbf{k})$ が電子－正孔連続体領域に入ると，プラズモンは不安定になって電子－正孔対へと崩壊する．第5章に示した粒子の寿命の議論から類推されるように，この過程は電子－正孔泡 $\Pi(\mathbf{k},\omega_\mathbf{k})$ が虚部を持つことに伴って現れる．式(9.42)を用いて，この虚部を計算することができる．$\omega(\mathbf{k})=\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})$ と表すと，電子－正孔連続体の領域では，運動量 $\mathbf{p}$ がFermi面の下にあるけれども $\mathbf{p}+\mathbf{k}$ がFermi面の上にあるような $\mathbf{p}$ が存在する．式(9.42)の分母は，これらの $\mathbf{p}$ においてゼロとなる．したがって先のLindhard関数の議論で省いた $i\epsilon$ をここで導入しなければならない．

$i\epsilon$ の処方を適用すると，$\Pi(\mathbf{k},\omega)$ は次のように表される．

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{[n(\mathbf{p})-n(\mathbf{p}+\mathbf{k})]}{\omega_\mathbf{k}-\{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})\}+i\epsilon(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|-p_\mathrm{f})-i\epsilon(|\mathbf{p}|-p_\mathrm{f})}$$
$$=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(\mathbf{p})\{1-n(\mathbf{p}+\mathbf{k})\}}{\omega_\mathbf{k}-\{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})\}+i\epsilon}-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{n(\mathbf{p}+\mathbf{k})\{1-n(\mathbf{p})\}}{\omega_\mathbf{k}-\{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})\}-i\epsilon} \tag{9.74}$$

$\omega_\mathbf{k}$ が正であれば，第1項から次のような虚部が生じる．

$$\mathrm{Im}\,\Pi(\mathbf{k},\omega)=\pi\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\delta\Big(\omega_\mathbf{k}-\{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})\}\Big)\Big[n(\mathbf{p})\{1-n(\mathbf{p}+\mathbf{k})\}\Big] \tag{9.75}$$

これはユニタリー性から許容される，すべての電子－正孔の終状態に関する和となっている．

この式の意味を古典的な見地から洞察することができる．$\omega_\mathbf{k}$ はプラズモンのエネルギーを表すが，同時に古典的な波の振動数でもある．振動数の虚部は，プラズマ振動のエネルギー散逸を表す．1947年にLandauが古典的な解析に基づいてプラズマ振動の減衰を論じたことから，この現象は“Landau減衰”(Landau damping)の術語で知られている．Landauの考察を再現するには，分布関数 $n(\mathbf{p})$ の形をステップ関数からFermi分布関数へと置き換えることで，有限温度でもBoltzmann方程式が成立することに注意すればよい．

$$n(\mathbf{p})\ \rightarrow\ n_\beta(\mathbf{p})=\frac{1}{e^{\beta\{\varepsilon(\mathbf{p})-\mu\}}+1} \tag{9.76}$$

Fermi分布は高温でMaxwell-Boltzmann分布になるが，Landauが考察したのは，この高温における振動である．どの分布関数を使うにしても，$\mathbf{k}$ が $n(\mathbf{p})$ の変化する範囲に比べて小さいならば，$\Pi(\mathbf{k},\omega_\mathbf{k})$ を，

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{k}\cdot\nabla n_\beta(\mathbf{p})}{\omega_\mathbf{k}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}+i\epsilon} \tag{9.77}$$

と近似できる．ここで $\mathbf{v}=\mathbf{p}/m$ である．我々は古典論における $i\epsilon$ の処方を導いていないが，上記の形は因果律との整合性から望ましいものになっている．したがって $\Pi(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}})$ の虚部は，次のようになる．

$$\pi\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big(\mathbf{k}\cdot\nabla n_\beta(\mathbf{p})\big)\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}) \tag{9.78}$$

デルタ関数によって，$\mathbf{k}$ 方向の速度がプラズモン密度波の位相速度 ω/k に近い電子だけが減衰に関与する．このような電子は“プラズモンの波に乗る”ことができて，波とエネルギーの授受を行う．

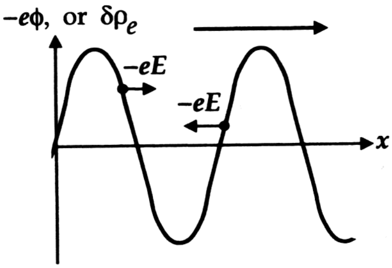


図 9.7　右向きに進むプラズモン密度波．波が進む側の斜面に乗った電子はエネルギーを得る．波頭の後ろ側の斜面に乗った電子はエネルギーを失う．

電子が密度波に“乗る”ことができる初期速度の範囲は狭い．この範囲内で波よりも少し遅い速度を持つ電子は，まず波に対して相対的に後退し，後から進行してくる波頭の前の斜面に達すると，そこで波からエネルギーを与えられて波の速度まで加速する．波よりも少し速い電子は，まず波より速く進む波頭の後ろの斜面にまで達し，そこで波にエネルギーを与えて減速する．統計力学的な分布としては低速度の電子の方が多いので，正味の効果としては，密度波が電子にエネルギーを与えて減衰することになる．減衰が起こるために電子速度の分布が必要であるという事情から，式(9.78)に $\mathbf{k}\cdot\nabla n_\beta(\mathbf{p})$ の因子が現れている．

ゼロ音波

これは“固体電子”の話題ではないが，考え方は似ているので，ここで紹介しておく．

液体ヘリウム 3 (^{3}He) における音波は，低温になると通常の音波から“ゼロ音波”(zero sound) へと変わる．^{3}He 原子は，電子 2 個，陽子 2 個および中性子 1 個で構成されている．奇数個の Fermi 粒子を含む各原子は，Fermi 粒子として振舞い，低温において単純な Fermi 統計に従う．ヘリウム 3 の流体は，およそ 1 K 以下で Fermi 縮退を起こすが，縮退しても常流動状態を保っている (^{3}He の超流動臨界温度は，圧力にもよるが 1 − 2 mK 程度である)．

ヘリウム原子間の実際の相互作用は複雑であるが，第 1 近似として各原子を互いに侵入できない剛体球と見なすことにする．原子間の斥力を 2 体のデルタ関数型相互作用によって記述する．第二量子化した形では，

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\lambda\int d^3x(\psi^\dagger\psi)^2 \tag{9.79}$$

と表される．$\lambda > 0$ とする．

ゼロ音波は，前節のプラズマ振動と似た密度波励起である．主な違いは粒子が電荷を持たないので，長距離に及ぶ静電気力が働かないという点である．このため密度波の最小振動数は，プラズマ振動の場合とは異なり，ゼロから隔たった有限値にはならない．

図 9.8 のような粒子－空孔チャネル (密度ゆらぎ) の励起を考える．各々の結節点に $-i\lambda$ の因子があてられる．

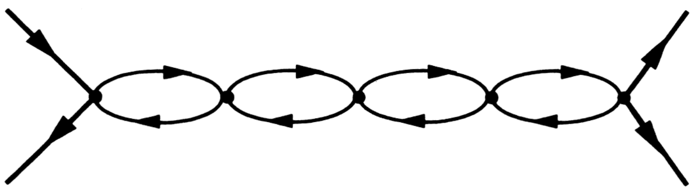


図 9.8 ゼロ音波が生じるチャネル．

ゼロ音波は，このようなダイヤグラムの和の極として現れるが，次式から見いだすこともできる．

$$(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\,\delta\tilde{n}(\mathbf{p},\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}) = \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}\frac{1}{v_{\text{f}}}\delta(|\mathbf{p}| - p_{\text{f}})\int\lambda\,\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\lambda\delta\tilde{n}(\mathbf{p}',\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}) \tag{9.80}$$

この式を成立させるために，次の条件が必要である．

$$\delta\tilde{n}(\mathbf{p},\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}) = \nu(\theta)\frac{1}{v_{\text{f}}}\delta(|\mathbf{p}| - p_{\text{f}}) \tag{9.81}$$

ν は $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ (すなわち $\mathbf{v}$ と $\mathbf{k}$) の相対角度 θ の関数である．したがって Fermi 面は形を変える．式(9.81)を仮定すると，式(9.80)においてデルタ関数を消去することができる．

$$(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k})\,\nu = \lambda\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{k}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{\mathrm{f}}}\right)\int\frac{d\Omega}{4\pi}\nu \tag{9.82}$$

式(9.82)の解は，次の形を持つ．

$$\nu = A\frac{\cos\theta}{s-\cos\theta}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{9.83}$$

ここで $s = \omega_{\mathbf{k}}/|\mathbf{k}|v_{\mathrm{f}}$ は，ゼロ音波の位相速度と Fermi 速度の比である．これを式(9.82)に代入すると，分散関係が次式によって決定されることが分かる．

$$\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon_{\mathrm{f}}}\lambda\right)^{-1} \tag{9.84}$$

λ がゼロに近づくと $s \to 1$ となるので，波の伝播速度は $c = \omega/k \to v_{\mathrm{f}}$ となる．したがってこの音波は，圧縮性に起因する通常の $c_{\mathrm{sound}} = v_{\mathrm{f}}/\sqrt{3}$ の音波 (第 1 音波) とは別のものである．弱結合の極限では式(9.83)の $\mathbf{k}$ 方向のピークが鋭くなるが，この点も通常の音波が Fermi 面を球状に保つのとは異なっている．通常の音波は粒子の統計分布を局所的な平衡状態へ緩和するような衝突散乱によって生じるが，この緩和には有限の時間がかかる．緩和時間を τ とすると，$\omega\tau \gg 1$ の高周波領域ではゼロ音波が現れ，$\omega\tau < 1$ の低周波領域では通常の音波が生じる．

9.3 電子とフォノン

前節では背景のイオン系によって Coulomb 場がほとんど打ち消されているような電子気体を扱った．すなわち，背景の正電荷が全空間にわたって一様に分布しているものと仮定した．

ここで電子とイオンの役割を入れ替えてみる．まず一様に分布する電子気体を背景として設定し，その中の各イオンを質量 M を持つ点電荷と考えて，金属中のフォノンに関する簡単なモデルを構築する．イオン系における長波長の微小変位 $\delta\mathbf{r}$ に伴い，次の過剰電荷が生じる．

$$e\delta\rho_{\mathrm{ion}} = -NeZ\nabla\cdot\delta\mathbf{r} \tag{9.85}$$

N は平均イオン密度で，イオンの電荷は Ze である[5](平衡状態における電荷中性の条件は $NZ = \rho_0$ と表される．ρ_0 は電子密度)．電子の動きを無視するならば，イ

[5] この記号の使い方は慣例に従ったものであるが，誤解を招きやすい．Z は原子番号ではなく，各原子が結晶中で伝導帯へ供出して失っている電子の数である．

オン密度の振動はイオン・プラズマ振動数 $\Omega_{\mathrm{p}}^2 = N(eN)^2/M$ で起こるはずである．しかしこの振動数は，電子のプラズマ振動数よりもはるかに低いので，実際には電子がイオンの振動に追随して，イオン電荷をある程度まで遮蔽する．その結果，実効的なイオン電荷は小さくなり，イオンの振動数は更に低くなる．運動方程式は次のように与えられる．

$$M\delta\ddot{\mathbf{r}} = Ze\mathbf{E} = -Ze\nabla\phi \tag{9.86}$$

$$-\nabla^2\phi + k_0^2\phi = e\delta\rho_{\mathrm{ion}} + eq_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}) \tag{9.87}$$

ここで電子系とイオン系の双方を合わせた遮蔽効果を調べるために，式(9.78)に外部電荷の項を導入しておいた．式(9.85)，(9.86)，(9.87)により，Fourier空間において次式が与えられる．

$$\phi(k,\omega) = \frac{1}{k^2}\left\{1 - \frac{\Omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2} + \frac{k^2}{k_0^2}\right\}^{-1} q_{\mathrm{ext}}(k,\omega) \tag{9.88}$$

これを慣例に従って，

$$\phi(k,\omega) = \frac{1}{\epsilon(k,\omega)}\frac{1}{k^2}q_{\mathrm{ext}}(k,\omega) \tag{9.89}$$

と書くことができる．$\epsilon(k,\omega)$ は振動数と波数に依存する“誘電関数”(dielectric function) で，ここでは次式のように表される．

$$\frac{1}{\epsilon(k,\omega)} = \left\{1 - \frac{\Omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2} + \frac{k^2}{k_0^2}\right\}^{-1} = \frac{1}{1 + \dfrac{k_0^2}{k^2}}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(k^2)}\right) \tag{9.90}$$

$$\omega^2(k^2) = \frac{\Omega_{\mathrm{p}}^2}{1 + \dfrac{k_0^2}{k^2}} \tag{9.91}$$

誘電関数の式(9.90)から興味深い結果を導くことができる．第1に外部電荷に対する応答は $\omega^2 = \omega^2(k^2)$ において極を持ち，縦方向 (longitudinal) の密度ゆらぎはこの振動数で伝搬する．k が小さいときの振動数は $\omega = ck$ と表される．音速 c は次式で表される．

$$c^2 = \frac{\Omega_{\mathrm{p}}^2}{k_0^2} \tag{9.92}$$

自由電子に関する次の値 (スピンを含む)，

$$\rho_0 = \frac{k_{\mathrm{f}}^3}{3\pi^2}, \quad \frac{1}{k_0^2} = \frac{1}{e^2}\frac{\pi^2}{mk_{\mathrm{f}}} \tag{9.93}$$

を代入すると，音速は次式で与えられる．

$$c^2 = \frac{1}{3}Z\frac{m}{M}v_{\mathrm{f}}^2 \tag{9.94}$$

この近似的なFermi速度と音速の関係は，Bohm-Staverの関係と呼ばれている．これは粗雑なモデルに基づく関係式ではあるが，金属の体積弾性率が自由電子気体のそれとほとんど等しいアルカリ金属 (Na, K など) を扱う場合には，比較的よい近似になる．

第2に，電子間の相互作用を媒介する実効的なCoulomb伝播関数が次式のようになる．

$$g(k,\omega) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{1+\dfrac{k_0^2}{k^2}}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega^2(k^2)}\right) \tag{9.95}$$

これは振動数に依存する——すなわち相互作用は瞬時には伝わらない．更に重要な点は，$\omega^2 < \omega^2(k^2)$ の低い振動数で“引力”が生じることである．電子が周囲のイオンを引き寄せることによって生じたイオンの集まりが，その電子が去った後に残り，このイオンの集中に伴う正電荷が別の電子を引き寄せるという過程によって，実効的に電子間引力が生じるのである．通常，フォノンの振動数の最大値 (ここで示したモデルでは Ω_p，一般にはDebye振動数) はFermiエネルギー ε_f に比べて非常に小さいので，引力相互作用はFermi面近傍の電子だけに働く．この電子間引力が，鉛，ニオブ，アルミニウムなどの金属超伝導体における超伝導現象の起源となっている．

第 10 章　非相対論的Bose粒子系

非相対論的Bose粒子系として最もよく研究されているのは，超流動相の液体ヘリウム 4 (^{4}He) である．本章ではこれを集中的に扱う．

10.1　Bose粒子場

Bose粒子の多体系を扱う方法は，前章でFermi粒子系を扱った方法と，粒子の統計が異なるだけで，基本的には同様に展開される．

まず 1 粒子ハミルトニアン，

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(x) \tag{10.1}$$

の下で，完全正規直交系を成す固有関数系 $\{\varphi_n\}$ が得られているものとする．

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n \tag{10.2}$$

固有関数系は，単一Bose粒子の空間 $\mathcal{H}^{(1)}$ の基底となる．ここで演算子 $\hat{a}_n$，$\hat{a}_n^\dagger$ が“交換関係”，

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{mn} \tag{10.3}$$

を持つと仮定し，第二量子化したHeisenberg描像のBose粒子場を，次のように定義する．

$$\hat{\varphi}(x,t) = \sum_n \hat{a}_n\varphi_n(x)e^{-iE_nt} \tag{10.4}$$

この場は，次の交換関係を満たす．

$$\left[\hat{\varphi}(x,t), \hat{\varphi}^\dagger(x',t)\right] = \delta^3(x-x') \tag{10.5}$$

この交換関係は，次のラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = i\varphi^\dagger\partial_t\varphi - \frac{1}{2m}|\nabla\varphi|^2 - \varphi^\dagger V(x)\varphi \tag{10.6}$$

に基き，φ に対して共役な一般化運動量を $\pi(x) \equiv i\varphi^\dagger(x)$ とおくと得られる．

演算子 $\hat{\varphi}(x,t)$，$\hat{\varphi}^\dagger(x,t)$ は，次の “大きな” 多粒子空間に作用する．

$$\mathcal{H} = \bigoplus_N \left\{ \bigotimes_{\rm symm}^N \mathcal{H}^{(1)} \right\} \tag{10.7}$$

これは単一粒子ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{(1)}$ の N 次の “対称な冪（べき）” の総和であり，N 個の粒子を含む状態を記述する．各々の $\bigotimes_{\rm symm}^N \mathcal{H}^{(1)}$ は，次のような状態によって張られる．

$$|m_1, m_2, \ldots\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m_i!}} \left(a_i^\dagger\right)^{m_i} |0\rangle \tag{10.8}$$

ここで $\sum m_i = N$ である．また $|0\rangle$ は粒子のない状態で，任意の $\hat{a}_i$ を作用させるとゼロになる．もちろんBose統計では多くの粒子が同じ状態に入ることが許容されるので，m_i はゼロ以上の任意の整数値をとることができる．

第二量子化したハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \int d^3x\, \hat{\varphi}^\dagger(x) H \hat{\varphi}(x) = \sum_n E_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \tag{10.9}$$

であり，総粒子数は，

$$\hat{Q} = \int d^3x\, \hat{\rho}(x) = \int d^3x\, \hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \tag{10.10}$$

と表される．また粒子流密度は，次式で与えられる．

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2mi} \left(\hat{\varphi}^\dagger \nabla \hat{\varphi} - (\nabla \hat{\varphi}^\dagger) \hat{\varphi} \right) \tag{10.11}$$

ここでも演算子について，次の連続の方程式が成立する．

$$\partial_t \hat{\rho} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0 \tag{10.12}$$

これ以降，演算子 $\hat{\varphi}$ のハット記号「$\hat{}$」を省略し，簡単に φ と書くことにする．

10.2 自発的な対称性の破れ

Bose粒子系を扱う形式はFermi粒子系のそれとよく似ているが，違いはどこに現れるのであろうか？ Bose統計では排他律が働かないので，Fermiの海のような状態はBose粒子系には存在しない．その代わりに多数の粒子が最低エネルギー準位を集中的に占有するBose凝縮 (もしくはBose-Einstein凝縮) が起こり得る．しかし粒子

間に相互作用がある場合，多粒子による1状態の占有という見方は，現象の本質を最もよく捉えたものとは言い難い．ここで“自発的な対称性の破れ”(spontaneous symmetry breaking.“対称性の自壊”とも言う)の概念を導入するのが適切であろう．Bose凝縮に伴って破られるのは，粒子数の保存に関わるU(1)対称性である．

もし基底状態 $|\Phi_0\rangle$ が，粒子数演算子の固有状態で，$\hat{Q}|\Phi_0\rangle = Q_0|\Phi_0\rangle$ であれば，$e^{i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{i\alpha Q_0}|\Phi_0\rangle \propto |\Phi_0\rangle$ であり，この基底状態はU(1)対称な非縮退状態である．これは自由度の数が有限な量子力学系において，常に成立する状況である．Perron-Frobeniusの定理によると，このような系の基底状態は縮退しない．またハミルトニアンと交換する任意の対称操作は，状態ベクトルを，同じエネルギー値に属する固有空間内のベクトルに変換する．

Bose粒子場 φ は，次の性質を持っている．

$$e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}} = e^{-i\alpha}\varphi(x) \tag{10.13}$$

この性質と，$|\Phi_0\rangle$ が上記の非縮退状態であるという仮定の下では，次の2つの式が同時に成り立たなければならない．

$$\langle\Phi_0|e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{i\alpha Q_0}e^{-i\alpha Q_0}\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle \tag{10.14}$$

$$\langle\Phi_0|e^{i\alpha\hat{Q}}\varphi(x)e^{-i\alpha\hat{Q}}|\Phi_0\rangle = e^{-i\alpha}\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle \tag{10.15}$$

これらが同時に成立するのは，$\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle = 0$ の場合に限られる．

次に，別の状態を考えるために，まず粒子間相互作用がないものと仮定し，規格化波動関数が $\varphi_0(x) = 1/\sqrt{V}$ の1粒子エネルギーを $E_0 = 0$ とおくことにする(このようなエネルギー基準の変更は，1粒子系を扱う際には単なる便宜的な措置に過ぎないが，多体系では系の化学ポテンシャル μ を変更することに相当する)．こうすると，系のエネルギーを変更することなく，φ_0 状態の粒子を任意の数だけ系に加えることができる．

ここで，粒子数が確定していない次のような状態を考えてみる．

$$|\phi\rangle = e^{\sqrt{V}(\phi\hat{a}_0^\dagger - \phi^*\hat{a}_0)}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi|^2}\sum_{N_0=1}^{\infty}\left(\sqrt{V}\phi\right)^{N_0}\frac{1}{\sqrt{N_0!}}|N_0\rangle \tag{10.16}$$

これはエネルギーがゼロの固有状態の和になっており，総和としてもエネルギーはゼロである．しかし一方で，

$$\varphi(x)|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle \tag{10.17}$$

なので，φ の期待値は，

$$\langle\phi|\varphi(x)|\phi\rangle = \phi \neq 0 \tag{10.18}$$

である．もちろん状態 $|\phi\rangle$ は $\hat{Q}$ の固有状態では“ない”．この状態に変換を施すと，

$$e^{-i\alpha\hat{Q}}|\phi\rangle = |e^{-i\alpha}\phi\rangle \tag{10.19}$$

となり，このときの右辺は，もはや $|\phi\rangle$ と同じ状態ではない．実際に，

$$\langle\phi'|\phi\rangle = e^{-\frac{1}{2}V|\phi-\phi'|^2} \tag{10.20}$$

なので，体積が無限大の極限において $|e^{-i\alpha}\phi\rangle$ と $|\phi\rangle$ は直交する．この場合，$\hat{Q}$ によって生成される U(1) 操作は，ひとつのゼロエネルギー状態を，別のゼロエネルギー状態へと変換する．ϕ として任意の複素数を選ぶことができるので，ゼロエネルギーの状態が無数に存在することになる．

状態 $|\phi\rangle$ の粒子密度は，

$$\langle\phi|\varphi^\dagger(x)\varphi(x)|\phi\rangle = |\phi|^2 \tag{10.21}$$

である．相互作用がある多粒子系を扱う場合，総粒子数を指定する (正準集団を扱う) かわりに，圧力や化学ポテンシャルを指定して密度を調節する (大正準集団を扱う) こともできる．熱力学的な極限において，これらの 2 種類の集団は，事実上同じものと見てよい．後者の立場を採ると，式(10.16)のような，異なる粒子数状態のコヒーレントな重ね合せを考慮することができる．相互作用によって粒子数は変わらないので，$\hat{Q}$ はハミルトニアンと交換する．したがって，ゼロでない $\langle\varphi\rangle = \phi$ の値を与える状態 $|\phi\rangle$ が，エネルギー固有状態のひとつであるならば，$e^{-i\alpha\hat{Q}}|\phi\rangle = |e^{-i\alpha}\phi\rangle$ はそれと直交し，かつ同じエネルギー値に属する固有状態である．それゆえ相互作用がある系でも，基底状態として多くの状態が縮退していることになるが，ϕ の値は複素平面内で一定の $|\phi|$ を持つ円周上に制約される．U(1) 群は，基底状態で構成される多様体に対して，推移的に作用する．

相互作用を持つ Bose粒子系の基底状態が，このように縮退を生じると，変換操作に付随する選択則や，多重項の表現上の性質が単純なものではなくなる．このことを対称性が“自発的に破れた”と言う．$\langle\Phi_0|\varphi(x)|\Phi_0\rangle$ のように，基底状態が非縮退のときにゼロで，対称性が自発的に破れた場合にゼロでなくなる量を“秩序パラメーター”(order parameter) と呼ぶ．秩序パラメーターは対称性の破れの指標となる．

粒子数が不確定な状態の概念に馴染みにくいならば，別の考え方を利用して Bose 凝縮と自発的な対称性の破れを扱うこともできる．それは Oliver Penrose (“ツイスター”や“Penroseタイル”で知られる Sir Roger とは兄弟である) による“非対

角長距離秩序" (off-diagonal long-range order : ODLRO) の概念である．次の 1 粒子密度行列を見てみよう．

$$R(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \langle\Phi|\varphi^\dagger(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')|\Phi\rangle$$
$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}\langle\Phi|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Phi\rangle \tag{10.22}$$

これは一様な系では $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ だけに依存するので，系全体の平均をとると，次のようになる．

$$\langle\Phi|\varphi^\dagger(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')|\Phi\rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}}\int d^3y\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})+i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}'+\mathbf{y})}\langle\Phi|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Phi\rangle$$
$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}\langle\Phi|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Phi\rangle$$
$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\langle\Phi|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Phi\rangle$$
$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}n_{\mathbf{k}} \tag{10.23}$$

$n_{\mathbf{k}}$ は運動量 $\mathbf{k}$ を持つ粒子の，単位体積あたりの密度である．$\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ とおくと，R は数密度となる．ここで，

$$n_{\mathbf{k}} = n_0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}) + f(\mathbf{k}) \tag{10.24}$$

とおいてみる．$f(\mathbf{k})$ は滑らかな関数とする．そうすると，

$$R(\mathbf{x},\mathbf{x}') = n_0 + \tilde{f}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{10.25}$$

となる．$\tilde{f}$ は f の Fourier 変換である．Riemann-Lebesgue の補題によると，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が互いに遠ざかると $\tilde{f}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ はゼロに近づく．したがって $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が離れても $R(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ がゼロに漸近しないならば，それは $n_0 \neq 0$ を意味しており，Bose 凝縮が起こっていることを表す．

任意の 2 つの演算子 $O_1(\mathbf{x})$，$O_2(\mathbf{x}')$ について，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を離していくと，

$$\langle\Phi|O_1(\mathbf{x})O_2(\mathbf{x}')|\Phi\rangle \;\to\; \langle\Phi|O_1(\mathbf{x})|\Phi\rangle\langle\Phi|O_2(\mathbf{x}')|\Phi\rangle \tag{10.26}$$

となるような状態 $|\Phi\rangle$ を，"クラスター分解性" (cluster decomposition property) を持つ状態と言う．このような状態は，古典統計力学からの少々まぎらわしい類推により "純粋状態" (pure state) と呼ばれることもある．この言葉の使い方を，量子力学で使われている用法と混同してはならない．粒子数が確定した状態でも，遠く離れた位置の間で，

$$\langle\Phi|\varphi^\dagger(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}')|\Phi\rangle \;\to\; n_0 \tag{10.27}$$

となるが，この場合は $\langle\Phi|\varphi|\Phi\rangle = 0$ なので，状態はクラスター分解性を持たない．$|\phi\rangle$ のようにコヒーレントで $\langle\phi|\varphi|\phi\rangle = (\mathrm{phase})\sqrt{n_0}$ となる状態は，クラスター分解が可能である．

低温における超流動 ^{4}He では，n_0 の全密度に対する割合は，およそ 0.08 − 0.11程度であり，粒子間相互作用の効果のために，最低エネルギーの 1 粒子状態を占める粒子数の割合は，あまり多くない．次節において，このような相互作用を持つ Bose 粒子系の簡単なモデルを扱う．

10.3 希薄なBose気体

10.3.1 Bogoliubov変換

希薄なBose気体のモデルは超流動 ^{4}He のモデルとして，Bogoliubovによって考案された．これは現実の複雑なヘリウム液体を扱う際に必ずしも最良のモデルとは言えないが[1)]，物理的に示唆に富む内容を含んでいる．このモデルは液体ヘリウムよりも，むしろ現在さかんに研究されているアルカリ金属原子気体のBose凝縮に適したモデルであるかも知れない．

最低の φ_0 モードを他のモードと区別して扱いたいので，まず大きさが有限で，運動量が離散的な値を持つ系を考えよう．ハミルトニアンを次のように置く．

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{\lambda}{2V} \sum \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_4+\mathbf{k}_3} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_4} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \tag{10.28}$$

相互作用項は，デルタ関数的な斥力 $\dfrac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2$ を離散運動量空間に移したものになっている．λ は小さいものとする．化学ポテンシャル μ が，系全体の粒子数 N を調節するパラメーターとなる．

N 個の粒子のうち，有限の割合にあたる巨視的な N_0 個の粒子が $\mathbf{k} = 0$ の状態を占めていると仮定しよう．相互作用がない系の基底状態 $|\Phi_0\rangle$ を，式(10.16)で $\sqrt{V}\phi = \sqrt{N_0}$ としたものとおく．他の状態は $|\Phi_0\rangle$ に $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ を作用させて作る．

$\mathbf{k} = 0$ の状態に大多数の粒子が入っているので，粒子間相互作用はほとんど $\mathbf{k} = 0$ 状態の粒子同士で起こり，あとはせいぜい一方だけ $\mathbf{k} = 0$ でない粒子との間で相互作用を考えれば十分である．そうすると，式(10.28)の相互作用項を次のように近似できる．

1) 主な問題点は，液体ヘリウムのモデルとしては，粒子間相互作用の与え方が適切でないことである．

$$\hat{H}_{\rm int} \approx \frac{\lambda}{2V}\left[\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0\hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left\{4\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_\mathbf{k}\hat{a}_0 + \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger\hat{a}_0\hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_\mathbf{k}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right\}\right] \tag{10.29}$$

$|\Phi_0\rangle$ に $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$ $(\mathbf{k}\neq 0)$ を作用させて作られる状態に関しては，$\hat{a}_0$ と $\hat{a}_0^\dagger$ をそれらの固有値 $\sqrt{N_0}$ で置き換えることができる．

$$\begin{aligned}\hat{H} \approx& \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m}-\mu\right)\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_\mathbf{k} - \mu N_0\\ &+\frac{\lambda}{2V}\left\{N_0^2 + 4N_0\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_\mathbf{k} + N_0\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_\mathbf{k}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{10.30}$$

上式はc-数の項 $\frac{\lambda}{2V}N_0^2 - \mu N_0$ を含んでいる．N_0 を変化させると，この項は $\frac{\lambda}{V}N_0 = \mu$ のときに最小となる．任意に μ を与えると，このように N_0 が決まるものと仮定しておく．この仮定は，後から得られる解とも整合するものである．

ハミルトニアンは，次のようになる．

$$\hat{H} \approx \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mu\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left(\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_\mathbf{k}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) \tag{10.31}$$

ここで $\epsilon(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2/2m$ である．

式(10.31)を対角化するために，$\hat{a}_\mathbf{k}$ および $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$ に対する "正準変換"，すなわち "Bogoliubov変換" を施す．

$$\begin{aligned}\hat{a}_\mathbf{k} &= \hat{b}_\mathbf{k}\cosh\theta + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger\sinh\theta\\ \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger &= \hat{b}_{-\mathbf{k}}\sinh\theta + \hat{b}_\mathbf{k}^\dagger\cosh\theta\end{aligned} \tag{10.32}$$

実数のパラメーター $\theta(\mathbf{k})$ の値は，すぐ後から決定する．Bogoliubov変換は，$\hat{b}_\mathbf{k}$ および $\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger$ が $\hat{a}_\mathbf{k}$ および $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$ と同じ交換関係を持つように規定されている．実際に $\hat{b}_\mathbf{k} = U\hat{a}_\mathbf{k}U^{-1}$ を満たすユニタリー演算子 U を見いだすことも可能だが，その形をここであらわに示す必要はない．

この変換によって，ハミルトニアン (10.31) は，次のようになる (正規積化に伴って現れる c-数は無視する)．

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger\hat{b}_\mathbf{k}\left\{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)\cosh 2\theta + \mu\sinh 2\theta\right\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_\mathbf{k}\hat{b}_{-\mathbf{k}}\right)\left\{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)\sinh 2\theta + \mu\cosh 2\theta\right\}\end{aligned} \tag{10.33}$$

ここで，後ろの項が消えるようにθを選ぶことにする．そうすると，

$$\tanh 2\theta(\mathbf{k}) = -\frac{\mu}{\epsilon(\mathbf{k})+\mu}, \quad \mathbf{k} \neq 0 \tag{10.34}$$

もしくは，これと等価な式として，

$$\cosh 2\theta(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(\mathbf{k})+\mu}{\sqrt{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)^2-\mu^2}}, \quad \sinh 2\theta(\mathbf{k}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)^2-\mu^2}} \tag{10.35}$$

が得られる．

これで，ハミルトニアンは，次のような単純な形になる．

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} \sqrt{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)^2-\mu^2} \tag{10.36}$$

これは自由Bose粒子系のハミルトニアンの形をしている．新たに定義されたBose粒子の個々のエネルギーは，

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)^2-\mu^2} \tag{10.37}$$

と表される．

新しい基底状態は，任意の$\hat{b}_{\mathbf{k}}$によって消滅する状態である．$\hat{a}_{\mathbf{k}}|\Phi_0\rangle = 0$で，$\hat{b}_{\mathbf{k}} = U\hat{a}_{\mathbf{k}}U^{-1}$なので，この基底状態を，次のように表すことができる．

$$|\Phi\rangle = U|\Phi_0\rangle \tag{10.38}$$

ここで$N_0 = V\mu/\lambda$の仮定が実際に成立することに注意されたい．$\left(\epsilon(\mathbf{k})+\mu\right)^2-\mu^2$の2つの$\mu$は等しいので，$\mathbf{k}=0$のときに$E_{\mathbf{k}}=0$である．計算をしてみると，他の$N_0$を選んだ場合，括弧の外の“$\mu$”とは異なる“$\mu$”を，括弧の中で$\epsilon$に加えなければならないことが分かる．このとき運動量がゼロの励起エネルギーはゼロでなくなるが，そうすると粒子を加えたり取り除いたりして，さらに凝縮体のエネルギーを下げられることになってしまう．したがって先に仮定したN_0の選び方は適正なものである．

$\mathbf{k}$が小さいと，式(10.37)を次のように近似できる．

$$E_{\mathbf{k}} \approx |\mathbf{k}|\sqrt{\frac{\mu}{m}} = |\mathbf{k}|\sqrt{\frac{\lambda\rho_0}{m}} \tag{10.39}$$

$\rho_0 = N_0/V$は凝縮体の粒子数密度である．このような線形の分散関係は，流体中の“音波”の特徴である．一方，$|\mathbf{k}|$が大きくなると，通常の自由粒子の分散関係$E_{\mathbf{k}} \approx \mathbf{k}^2/2m$に移行する．

長波長の固有状態を“音波”と捉えるのは，一見奇妙な感じがする．前章で見たFermi粒子系では，相互作用のない極限で単一電子に対応するような準粒子励起と，粒子ー空孔対の集団的な挙動によるプラズモンやゼロ音波のような音波的な励起の間には明確な区別があった．しかしBose粒子系では両者に本質的な区別がない．音波と1粒子状態の分散関係は，徐々に互いの状態へと移行するように接続して，ひとつの分散曲線を形成している．この2つの特性の融合は，粒子数を保存するU(1)対称性が自発的に破れていることに関係がある．前章のFermi粒子系における準粒子励起と集団励起は，電荷の量子数によって区別できるものであった——電子的な準粒子はU(1)電荷+1を持ち，集団の音波的なモードのU(1)電荷は中性である．しかしBose粒子系においてU(1)対称性が破れていれば，励起は基底状態との間で電荷をやり取りできるので，励起状態は電荷の固有状態にはならない．

$N = N_0$ よりも精度のよい粒子数 N の近似値は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} N &= \langle\Phi|\, \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} |\Phi\rangle \\ &= N_0 + \sinh^2\theta \langle\Phi|\hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger|\Phi\rangle \\ &= N_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left\{\frac{\epsilon+\mu}{\sqrt{(\epsilon+\mu)^2-\mu^2}} - 1\right\} \end{aligned} \tag{10.40}$$

上式によると，相互作用がある多体系の基底状態が含む粒子の数は，1粒子基底状態に入っている凝縮粒子数より λ 程度の割合だけ多い．しかしこの簡単な1次補正は，PenroseとOnsagerが推定した，超流動 ^{4}He では8％程度の原子しか1粒子基底状態に入らないという結果を正しく再現していない．

上記の方法を高次の λ まで系統的に扱えるように改良することは難しい．次節でこれとは別の方法を示すことにする．

10.3.2 場の方程式

前節で得た $E_{\mathbf{k}}$ の分散曲線と同じものを，古典的な場の方程式から導くこともできる．ラグランジアン密度を，

$$\mathcal{L} = \varphi^\dagger\Big(i\partial_t + \frac{1}{2m}\nabla^2 + \mu\Big)\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \tag{10.41}$$

と置く．μ はBose粒子系の化学ポテンシャルである．

この式のポテンシャルの部分は，

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 - \mu\varphi^\dagger\varphi \tag{10.42}$$

と表される．これは $\varphi^\dagger\varphi = \mu/\lambda$ において最小となるので，

$$\langle\varphi\rangle = \varphi_{\rm c} = e^{i\theta}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \tag{10.43}$$

の定常解が予想される．θ は任意に選べる．これが古典的な基底状態の候補となる．

このような定常点からの小さな振動を調べてみよう．一般性を失うことなく $\theta = 0$ と置くことができる．$\varphi = \varphi_c + \eta$ とすると，ポテンシャル項は次のようになる．

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{\lambda}{2}\left(\varphi^\dagger\varphi - \varphi_{\rm c}^\dagger\varphi_{\rm c}\right)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2}\left((\varphi_{\rm c}^\dagger + \eta^\dagger)(\varphi_{\rm c} + \eta) - \varphi_{\rm c}^\dagger\varphi_{\rm c}\right)^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \\ &= \text{const.} + \mu\eta^\dagger\eta + \frac{\mu}{2}\eta\eta + \frac{\mu}{2}\eta^\dagger\eta^\dagger + O(\eta^3) \end{aligned} \tag{10.44}$$

$\mu = \lambda\rho_0$ なので (ρ_0 は凝縮体の粒子密度)，これらの項は η 場と凝縮体の相互作用を表し，図 10.1 に示すダイヤグラムに対応する．

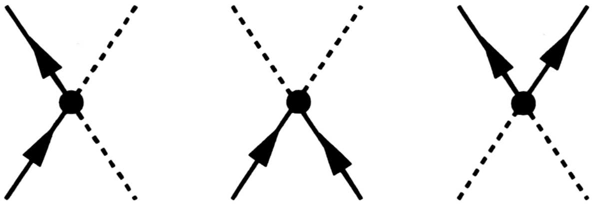


図 10.1　式(10.44)の粒子と凝縮体の相互作用項を表すダイヤグラム．

このまま 2 次までの項を残すと，線形な運動方程式が得られる．

$$\begin{aligned} i\partial_t\eta &= -\frac{1}{2m}\nabla^2\eta + \mu\eta + \mu\eta^\dagger \\ -i\partial_t\eta^\dagger &= -\frac{1}{2m}\nabla^2\eta^\dagger + \mu\eta^\dagger + \mu\eta \end{aligned} \tag{10.45}$$

上式において，次の形の平面波解を考える．

$$\eta = ae^{ikx - i\omega t} + b^\dagger e^{-ikx + i\omega t} \tag{10.46}$$

すると，次の条件が与えられる．

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2m}k^2 - \omega + \mu & \mu \\ \mu & \dfrac{1}{2m}k^2 + \omega + \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \tag{10.47}$$

行列式をゼロと置くと，次式が得られる．

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{2m}k^2 + \mu\right)^2 - \mu^2 \tag{10.48}$$

$\mu = \lambda|\varphi_c|^2 = \lambda\rho_0$ なので，これは式(10.37)と全く同じ分散曲線を表す．

波が運動する間に φ の先端は平衡位置 $\varphi = \varphi_c$ のまわりで楕円の軌跡を描く．式(10.47)の解 (a, b) を用いて，楕円の主軸の比は $(a-b)/(a+b)$ と与えられる．また楕円上の φ の辿り方は，粒子が音波の伝播方向に動くような波の位相の間，密度 $|\varphi|^2$ が大きくなるということによって決まる．

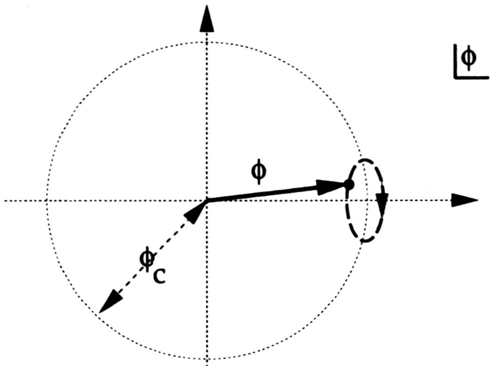


図 10.2　式(10.45)による φ 場の軌道．

10.3.3 量子化

Bose粒子場 φ を量子化する際には，φ_c を古典的な定数として扱い，η 場を次の正準交換関係を持つ演算子と考える．

$$\left[\eta(\mathbf{x}), \eta^\dagger(\mathbf{x}')\right]_{t=t'} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{10.49}$$

相互作用ポテンシャル (10.44) において 2 次の項までを残し，η 場の伝播関数を計算することができる．$\langle\Phi|\,T\{\eta^\dagger(x)\eta(x')\}|\Phi\rangle$ に加えて，$\langle\Phi|\,T\{\eta^\dagger(x)\eta^\dagger(x')\}|\Phi\rangle$ や $\langle\Phi|\,T\{\eta(x)\eta(x')\}|\Phi\rangle$ もゼロでない値を持つ．これは凝縮体との相互作用によって η と $\eta^\dagger$ が混合するからである．運動量空間において，これらの伝播関数は式(10.47)の行列の逆行列を構成する．省略記号として，

$$\langle\Phi|\,T\{\eta^\dagger(x)\eta(x')\}|\Phi\rangle = \langle\eta^\dagger\eta\rangle \tag{10.50}$$

などを用いると，次のように表される．

$$\begin{bmatrix} \langle \eta^\dagger \eta \rangle & \langle \eta^\dagger \eta^\dagger \rangle \\ \langle \eta\eta \rangle & \langle \eta\eta^\dagger \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{(\epsilon+\mu)^2-\mu^2-\omega^2} \begin{bmatrix} \epsilon+\omega+\mu & -\mu \\ -\mu & \epsilon-\omega+\mu \end{bmatrix} \tag{10.51}$$

この伝播関数の表現を用いて，粒子密度に対する最低次の補正を見い出すことができる．

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= |\varphi_c|^2 + \langle \eta^\dagger \eta \rangle \\ &= |\varphi_c|^2 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\epsilon + i\omega + \mu}{(\epsilon+\mu)^2 - \mu^2 + \omega^2} \end{aligned} \tag{10.52}$$

この表式を書くにあたり，ω を Euclid 領域へと回転させた．ω の積分を実行すると，次のようになる．

$$\langle \rho \rangle \overset{?}{=} |\varphi_c|^2 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon+\mu}{\sqrt{(\epsilon+\mu)^2-\mu^2}} \tag{10.53}$$

上式は実は正確なものではない．時間順序積において $\eta^\dagger(x)$ が $\eta(x)$ の左側にくることを保証する微小な時間差を取り込まず，$\langle \eta^\dagger \eta \rangle$ の代わりに $\frac{1}{2}\langle \eta^\dagger \eta + \eta\eta^\dagger \rangle$ を計算してしまったからである．交換子 $\frac{1}{2}\delta^3(0)$ を差し引くことで，この誤りを正すと，次のようになる．

$$\langle \rho \rangle = |\varphi_c|^2 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\epsilon+\mu}{\sqrt{(\epsilon+\mu)^2-\mu^2}} - 1 \right\} \tag{10.54}$$

この結果は，式(10.40)と一致する．

相互作用 (10.44) の高次の項までを残すと，$\eta^\dagger \eta \varphi_c^\dagger \eta$ のような結節点から，1粒子が粒子ー反粒子対に変わる過程が生じる．この過程が存在することにより，既に言及したように，この系では準粒子と音波的な集団モードの間に明確な区別がつかないのである．

ここで扱っているBose粒子気体のモデルを，実際の液体ヘリウムに当てはめて，以下のようにパラメーターを決めることができる．m をヘリウム原子の質量 (6.647×10^{-27} kg) とすると，液体ヘリウムの質量密度 ($m\rho_0 = 145\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$) から粒子数密度 ρ_0 が求まり，さらに音速の測定値 ($c = \sqrt{\lambda\rho_0/m} = 230\ \mathrm{ms^{-1}}$) から相互作用項のパラメーター λ が決まる．このように選んだパラメーターによって，治癒長 (healing length) などは実測値に近い値が求まる．しかし残念ながら，このモデルでは正しく記述できない性質もある．

たとえば，実際のヘリウムにおける音波の分散曲線には“ロトンの極小点”(roton minimum) と呼ばれる特異な点が存在するが，ここで示した希薄なBose粒子気体の単純なモデルにおいて，このような励起エネルギーの極小値は現れない．

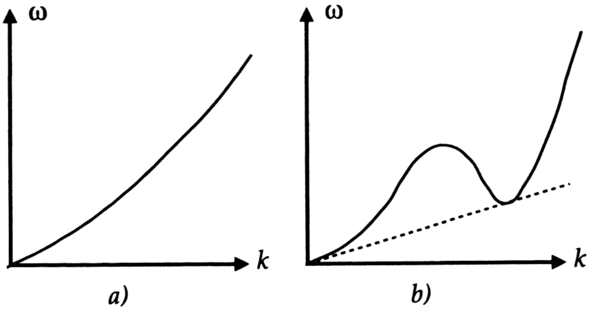


図 10.3 a) 希薄なBose粒子気体モデルにおける励起の分散曲線と，b) 実際の超流動 ^{4}He における音波の分散曲線．b) の点線は $\omega = v_0 k$ の直線で，ロトンの極小点への正接である．

10.3.4 超流動のLandau臨界条件

フォノンの分散曲線と超流動状態を関係づける興味深い議論が，Landauによって与えられている．質量 M の大きな物体が，速度 $\mathbf{V}$ で流体中を移動している状況を考える．流体における励起がフォノンだけに限定されるならば，物体が流体から受ける抵抗力は，すべてフォノンの生成によって生じる．フォノンの生成に伴って，物体がエネルギー δE と運動量 $\delta\mathbf{k}$ を失うとすると，

$$\delta E = \delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{V} + O\left(\frac{1}{M}\right) \tag{10.55}$$

である．物体が失うエネルギーと運動量は，フォノンが受けるエネルギーと運動量に等しい．

$$\delta E = -\sum \omega(\mathbf{k}_i), \quad \delta\mathbf{k} = -\sum \mathbf{k}_i \tag{10.56}$$

次に，フォノンの位相速度の下限 (infimum) がゼロでないと仮定する (図 10.3 b 参照).

$$v_0 = \inf\left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}\right) \tag{10.57}$$

この最小位相速度を，式(10.55)に用いると，次の関係が得られる．

$$|\delta E| = \sum \omega(\mathbf{k}_i) \geq v_0 \sum |\mathbf{k}_i| \geq v_0 \left|\sum \mathbf{k}_i\right| = v_0|\delta\mathbf{k}| \tag{10.58}$$

したがって，許容される任意の $\delta\mathbf{k}$ に関して $|\delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}| \geq v_0|\delta\mathbf{k}|$ が成り立つ．このような $\delta\mathbf{k}$ は，$|\mathbf{V}| \geq v_0$ のときだけに存在する．物体はこの最小速度を超えない限り，抵抗力を受けることがない．

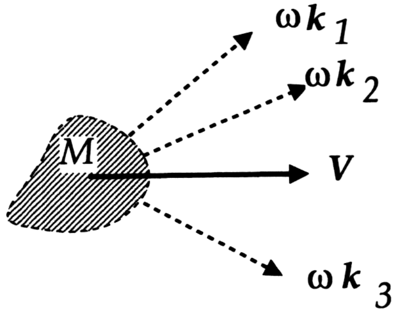


図 10.4 流体中を移動する物体からのフォノンの放出.

散逸の起こらない速度の上限を与える上記のLandau臨界条件 (Landau criterion) の議論は一見妥当なものに見えるが，欠陥を含んでいるはずである．現実の液体ヘリウムでは，分散曲線からは $v_0 \approx 60\ \mathrm{ms}^{-1}$ と与えられるが，臨界速度の実測値はこの値よりもはるかに小さく，流体の周囲の形状要因にも敏感に依存する．この問題に対して説明を与える前に，$|\mathbf{V}| \geq v_0$ という条件の古典的な解釈に言及する．船が進むとき，船が波を起こすことに伴って抵抗力が生じる．誰もが経験的に知っているように，船上から船が起こした波を見ると，波は波形を一定に保って，船と並進しているように見える．言い替えると，波の位相速度は，船の進行方向の成分を見ると，船自身の速度と等しい．このような状況は，媒質中を一定の速度で進む物体からの，波の放射現象に関して常に成立する．Landauの臨界条件は，物体の速度と合致した位相速度を持つ音波が存在するための条件となっている．

Landauの議論の問題点は，フォノンを超流体における唯一の低エネルギー励起と考えたことである．次節で見るように，実際には渦糸が関与する別の種類の励起も存在する．流体中を移動する物体が渦糸を生成したり，既に存在する渦糸を物体が引き伸ばしたり，もつれさせたりする過程も，物体の運動エネルギーを消耗させる抵抗力の原因となるのである．

10.3.5 常流体と超流体の密度

先に希薄なBose粒子気体におけるフォノンの分散関係を計算したとき，我々は凝縮体が静止している座標系を用いた．流体に流れがあるときのスペクトルを見いだすために，まずGalilei変換によってエネルギーと運動量がどのように変換するか

を理解する必要がある．最も簡単な方法として，質量 m の外部物体 (たとえば中性子) が，流体に衝撃を与えて，ひとつのフォノンを発生する過程を考える．流体が静止している座標系において，外部粒子が初期エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$，運動量 $m\mathbf{v}$ で発射され，終状態においてエネルギー $\frac{1}{2}m(v')^2$，運動量 $m\mathbf{v}'$ になるとすると，生成されるフォノンのエネルギーは $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(v')^2$，運動量は $\mathbf{p} = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ と与えられる．

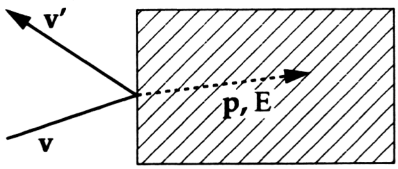


図 10.5　粒子の散乱とフォノンの生成.

流体が速度 $\mathbf{V}$ で動いている座標系から見ると，初期状態における粒子のエネルギーは $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}+\mathbf{V}|^2$，終状態のエネルギーは $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}'+\mathbf{V}|^2$ である．したがって流体に与えられたエネルギーは,

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}+\mathbf{V}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'+\mathbf{V}|^2 = E + m(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\cdot\mathbf{V} \tag{10.59}$$

であり，移行する運動量は，静止座標から見た場合と等しく,

$$m\big((\mathbf{v}+\mathbf{V}) - (\mathbf{v}'+\mathbf{V})\big) = m(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = \mathbf{p} \tag{10.60}$$

である．励起自体は同じものなので，動いている座標系から見た励起エネルギーは次のようになっていなければならない.

$$\tilde{E}(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\cdot\mathbf{V} \tag{10.61}$$

このエネルギーの変換則を理解するための，もうひとつの方法としては，E を $\hbar\omega$，$\mathbf{p}$ を $\hbar\mathbf{k}$ と考え直せばよい．ω は音波の振動数，$\mathbf{k}$ は波数である．フォノンの分散関係は,

$$\omega(\mathbf{k}) \;\rightarrow\; \tilde{\omega}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k}\cdot\mathbf{V} \tag{10.62}$$

となるが，これはちょうど，音波の載った媒質が，観測者に対して速度 $\mathbf{V}$ で運動する場合のDopplerシフトになっている.

この変換則は，有限温度において重要な結果を導く．毛細管の中を流れるBose流体を考えよう．熱励起されたフォノンは，管の壁の散乱を受けて平衡状態に戻る．流れと同じ方向のフォノンは，流れと反対向きのフォノンよりも高いエネルギーを持つので，反対向きのフォノンの方が多く発生し，これによって流体の全運動量は下がる．温度 T におけるフォノンの運動量密度は，

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\hbar\mathbf{k})\, n_\beta\big(\omega(\mathbf{k}) + \mathbf{k}\cdot\mathbf{V}\big) \tag{10.63}$$

である．ここで，

$$n_\beta(\omega) = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega)} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \tag{10.64}$$

は，Bose分布関数である．$\mathbf{V}$ が小さければ，次のように書ける．

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\hbar\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}) \frac{\partial n_\beta}{\partial\omega} = -\rho_{\text{n}}\mathbf{V} \tag{10.65}$$

$$\rho_{\text{n}}(T) = -\frac{\hbar}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^2 \frac{\partial n_\beta}{\partial\omega} \tag{10.66}$$

n_β の微分は負なので，ρ_{n} は正の量である．流れに伴う全運動量は，次式で表される．

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \rho\mathbf{V} - \rho_{\text{n}}\mathbf{V} = \rho_{\text{s}}\mathbf{V} \tag{10.67}$$

(ここで ρ は本書の他の部分とは異なり，質量密度を表す．超流動を扱う文献では，この用法が慣例となっている.) 後の方の等式によって“超流動質量密度”(superfluid mass density) $\rho_{\text{s}} = \rho - \rho_{\text{n}}$ が定義される．運動量密度は，質量の流れの密度でもある (付録F参照)．背景となる凝縮体の速度 $\mathbf{V}$ を“超流動速度”(superfluid velocity) $\mathbf{v}_{\text{s}}$ と呼ぶことにするが，この速度で運ばれる質量の流れは，

$$\mathbf{j} = \rho_{\text{s}}\mathbf{v}_{\text{s}} \tag{10.68}$$

に過ぎない．ρ_{n} の割合は，管壁との摩擦によって定常値を保つ．

管壁自体が速度 $\mathbf{v}_{\text{n}}$ で動くならば，式(10.65)の最後の式は，

$$\mathbf{P}_{\text{phonon}} = \rho_{\text{n}}(\mathbf{v}_{\text{s}} - \mathbf{v}_{\text{n}}) \tag{10.69}$$

に置き換えられ，質量の流れの密度は次のようになる．

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_{\text{s}} - \rho_{\text{n}}(\mathbf{v}_{\text{s}} - \mathbf{v}_{\text{n}}) = \rho_{\text{s}}\mathbf{v}_{\text{s}} + \rho_{\text{n}}\mathbf{v}_{\text{n}} \tag{10.70}$$

この式がTisza，LondonおよびLandauによる“二流体モデル”(two fluid model)の基礎となる．このモデルでは，流体の中で密度 ρ_{s} の部分だけが超流動を担って

おり，残りの密度 $\rho_{\rm n}$ の“常流動成分”(normal component) は，通常の粘性流体のように振舞う．常流動成分はフォノンによって生じるものだが，$\mathbf{v}_{\rm n}$ をフォノンの平均速度と誤解してはならない．すでに見たように $\mathbf{v}_{\rm n}=0$ であっても，フォノンは $\mathbf{v}_{\rm s}$ と反対方向に伝搬しようとする．常流動成分の速度 $\mathbf{v}_{\rm n}$ は，流体が局所的に平衡状態にあると見なせる座標系の速度である．

10.4 荷電Bose粒子系

10.4.1 Gross-Pitaevskii方程式

ラグランジアン (10.41) の変分から求まる非線形の Schrödinger 方程式は“Gross-Pitaevskii 方程式”と呼ばれる．この式は，超流動状態にある凝縮体のモデルとしてしばしば用いられる．また，これから示すように，この方程式は超伝導体の電磁気学を記述するモデルにもなる．後者の場合はもちろん，電子の Cooper 対(つい)を Bose 粒子と考えるので，$m=2m_{\rm e}^*$ とおき，粒子の電荷を $e\ \to\ q=-2e$ とすることになる．

$\hbar$ を明示し，外部の電磁場との相互作用を含めると，一般の Gross-Pitaevskii 方程式は，次のように書かれる．

$$i\hbar(\partial_t - ieA_0/\hbar)\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{a=1}^{3}(\partial_a - ieA_a/\hbar)^2\varphi + \lambda(|\varphi|^2-\rho_0)\varphi \qquad (10.71)$$

ここで式 (10.71) に“Madelung 変換”を施すと，平衡粒子数密度 ρ_0 の，電荷を持つ圧縮性流体の運動方程式が得られる．Madelung に従って $\varphi=\sqrt{\rho}\,e^{i\theta}$ と置き，また粒子流密度，

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\Big(\varphi^*(\nabla - ie\mathbf{A}/\hbar)\varphi - \big((\nabla + ie\mathbf{A}/\hbar)\varphi^*\big)\varphi\Big) \qquad (10.72)$$

が，$\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ と書けるように，速度場 $\mathbf{v}$ を定義する．$\mathbf{v}$ は次のように与えられる．

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}(\nabla\theta - e\mathbf{A}/\hbar) \qquad (10.73)$$

φ が渦糸による特異性を持たない場合には，“渦度ベクトル”$\boldsymbol{\omega}=\nabla\wedge\mathbf{v}$ は，ゲージ場から $\boldsymbol{\omega}=-\dfrac{e}{m}\nabla\wedge\mathbf{A}=-\dfrac{e\mathbf{B}}{m}$ のように完全に決定される．すなわち次式が成り立つ．

$$m\boldsymbol{\omega} + e\mathbf{B} = 0 \qquad (10.74)$$

電荷を持たない超流体において，式(10.74)は"非回転的運動"(irrotational motion)を意味しており，圧縮性の効果が無視できる低速においては，D'Alembertのパラドックス (抵抗力が働かないこと) が導かれる．一方，電荷を持った超流体において，式(10.74)は"Meissner効果"をもたらす．均一な磁場 $\mathbf{B}$ が電荷を持つ超流体に侵入しようとすると，一様な渦，すなわち剛体的な回転が必要となる．剛体的な回転は，系の体積よりも急速に増加する運動エネルギーを持つので，熱力学的な極限で，このような運動が生じることはない．かわりにMaxwell方程式の $\nabla \wedge \mathbf{B} = e\mathbf{j}$ と，$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s$ を，式(10.74)に適用すると，

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{e^2 \rho}{m} \mathbf{B} = 0 \tag{10.75}$$

の関係が得られ，磁束の遮蔽効果が導かれる．式(10.74)にも"London侵入長" $(e^2\rho/m)^{-1/2}$ にも $\hbar$ が含まれないことに注意されたい．

圧縮性の流体が電荷を持っていれば，静電場の遮蔽も可能である．Meissner効果とDebye遮蔽の組み合わせによって，流体中の光子には有効質量が付与される．これは"Higgs-Kibble機構"(Higgs-Kibble mechanism)の，非相対論系における実例である．

10.4.2　渦糸

Gross-Pitaevskii方程式は，荷電Bose流体でも中性Bose流体の場合でも，特異な渦糸 (vortex) の解を持つ．φ の位相は，渦糸のまわりを周回すると 2π だけ変化する．φ の大きさは，渦糸の中心でゼロになる．そうでないと，渦糸の部分で場を矛盾なく定義することができない．

中性Bose流体の場合，この位相変化が 2π であるということは，

$$\kappa = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.76}$$

のように定義される渦糸のまわりの"循環"(circulation) κ が，

$$\kappa = \oint \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\hbar}{m} \tag{10.77}$$

となることを意味する．循環の量子化の概念は，Onsager[2)]が1949年に開催された学会の講評において初めて言及したものであるが，そのとき彼は超流体が同一の中

2)Lars Onsager：1903 年 11 月 27 日 Kristiania (ノルウェー) 生まれ．1976 年 10 月 5 日 Coral Gables (フロリダ州) にて死去．1968年ノーベル化学賞．

心軸のまわりを円筒状に回転するという誤った描像を持っていたようである．回転を持つ状態として最もエネルギーの低いものは，多数の離散的な渦糸を含む状態であることを最初に理解したのはFeynmanで，これは1955年のことであった．

循環量子 κ の式(10.77)は，単純なモデルにおける古典的近似から得られたものなので，実際の循環量子において，式(10.77)の m が単純にヘリウム原子の裸の質量に一致するのか，あるいは多体効果によって m に補正が生じるのかという問題は興味深い．均一な流体の"一様な"流れにおいてはGalilei不変性の要請から，式(10.73)の m はヘリウム原子の質量に一致しなければならないが，これは速度と密度が分布を持つ場合に補正が生じる可能性を排除するものではない．しかし実際に観測される循環は，1％以内の誤差で $m = M_{\mathrm{He}}$ となっており，両者は実験結果としては最良の精度で一致していると言える．

直線的な渦糸に伴う速度の場は，古典的な渦糸と同様に，渦糸から離れるにしたがって $1/r$ のように減少する．このことは，孤立した渦糸が無限大の大きさを持つ系の中にあると，運動エネルギーが対数的に発散することを意味している．このような渦糸に対応する式(10.71)の厳密解は得られないが，近似として，

$$|\varphi(r)| \approx \left(\frac{r^2}{r^2+2\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.78}$$

が成り立つ．ここで現れる ξ は，

$$\xi = \hbar/\sqrt{2m\lambda\rho_0} \tag{10.79}$$

であり，"治癒長"と呼ばれる[†]．

流体が電荷を持つ場合，荷電粒子の循環による電流は磁場を発生し，この磁場は式(10.74)の関係を通じて，渦糸の芯と渦度の総量が等しくて，反対の方向を向いている，拡がりを持った"反渦糸"(anti-vortex)をつくる．この反渦糸による遮蔽のために，速度場は渦糸の芯から遠ざかると指数関数的に減衰し，無限遠での循環はゼロになる．磁場も式(10.75)に従って減衰する．全磁束は式(10.73)を $\mathbf{v}=0$ と置くことのできるような，無限遠を回る径路の積分によって求まる．渦糸が z 軸に平行であれば，次のようになる．

$$\int B_z dxdy = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{e}\oint \nabla\theta\cdot d\mathbf{r} = 2\pi\,\frac{\hbar}{e} \tag{10.80}$$

(Cooper対(つい)の流体に適用する場合には，$e \;\to\; e^* = 2e$ とする．) 上記のように量子化された磁束の"管"を"Abrikosovの渦糸"(Abrikosov vortex)と呼ぶ．このよ

[†](訳註) 本書では"治癒長"(原書では healing length) という語を使っているが，一般にはコヒーレンス長 (coherence length) という語がよく用いられる．

うな磁束管の渦糸が安定であるためには，磁場侵入長 λ が治癒長 ξ の $\sqrt{2}$ 倍よりも長くなければならない．この大小関係が満たされなければ，渦糸同士は互いに引き合い，磁場と超流動相は完全に分離する．$\lambda > \sqrt{2}\xi$ の超伝導体を第II種超伝導体，$\lambda < \sqrt{2}\xi$ のものを第I種超伝導体と呼ぶ．

磁束量子化の議論は，流体の速度だけに依存するが，この速度はベクトルポテンシャルと秩序パラメーターの位相を組み合わせたゲージ共変な関数として表される．したがって磁束の量子化は，秩序パラメーターのゲージ変換性だけに依存し，多体の補正効果にはほとんど影響されない．

10.4.3 流体力学との関係

式(10.72)の定義により，式(10.71)の実部と虚部はそれぞれ，連続の方程式，

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{10.81}$$

と，電荷を持つバロトロピック (barotropic) な流体の流れを表す Euler方程式，

$$m(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \nabla \zeta \tag{10.82}$$

となる．“バロトロピック”という語は，通常の Euler方程式で右辺に現れる圧力項 $(1/\rho)\nabla P$ が，ここではポテンシャルの勾配，

$$\zeta \equiv \lambda(\rho - \rho_0) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \tag{10.83}$$

に組み込まれていることを表す．ポテンシャル ζ は，平衡密度からのずれに依存する圧縮性の圧力と，ρ の勾配を修正する量子力学的な効果を両方とも含む．後者の“量子圧力”(quantum pressure) が，流れの式の中で唯一 $\hbar$ が現れるところである．この量子圧力によって，系の境界や渦糸においてゼロになっている超流動密度が，凝縮体内部の平衡値にまで回復する距離の指標 $\xi = \hbar/\sqrt{2m\lambda\rho_0}$ が決まる (もちろん $\hbar$ は循環の量子 $\kappa = 2\pi\hbar/m$ にも現れる)．

先に示した液体ヘリウムのパラメーター値によると，$\xi = 0.487$Å となる．

Euler方程式(10.82)は，式(10.71)の勾配をとり，その結果を Bernoulli方程式，

$$m(\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \nabla\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \zeta\right) \tag{10.84}$$

と解釈して得ることもできる．この方程式は (10.82) と等価である．

式(10.74)の関係から，式(10.84)において $m\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$ の項と $e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ の項が相殺することは明らかである．この相殺の結果，$\mathbf{B}$ にも $\boldsymbol{\omega}$ にも依存しない，超伝導体に

対する伝統的な流体力学的描像が導かれる．しかし私としては，式(10.84)の $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{B}$ を残し，式(10.82)のように書いておく方が好ましいように思われる．こうすると超流体と古典的な流体の力学の違いが，式(10.74)の制約だけに依っていることが明確に分かる．

第 11 章　有限温度

11.1　分配関数

有限温度 T における多粒子系の熱力学的な性質は，その化学ポテンシャルを μ とすると，次の大分配関数 (grand canonical partition function),

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left\{e^{\beta(\mu\hat{N}-\hat{H})}\right\} \tag{11.1}$$

によって与えられる[†]．$\beta = 1/kT$ である．相互作用を持たないBose粒子系を考え，1粒子のエネルギー固有値を E_n とすると，それぞれの E_n を持つ固有状態を占める粒子数に着目して，大分配関数を表すことができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \prod_n \left(1 + e^{\beta(\mu-E_n)} + e^{2\beta(\mu-E_n)} + \ldots\right) \\ &= \prod_n \left(1 - e^{\beta(\mu-E_n)}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{11.2}$$

占有数に関する和の部分が意味を持つためには $\mu < E_{\mathrm{min}}$ でなければならない．質量 m の非相対論的自由Bose粒子の系では，$\mathcal{Z}$ は次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \exp\left\{-(\mathrm{Vol})\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 - e^{\beta(\mu-k^2/2m)}\right)\right\} \tag{11.3}$$

大正準ポテンシャル (grand potential) Ω を，

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\Omega} \tag{11.4}$$

という式で定義すると[‡]，これは次のように表される．

$$\Omega = (\mathrm{Vol})\frac{1}{\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 - e^{\beta(\mu-k^2/2m)}\right) \tag{11.5}$$

[†](訳註) 分配関数 (状態和sum of statesとも言う) は“統計力学的ハミルトニアン” $\hat{K}$ を用いて $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\hat{K}}$ と表される．正準集団では $\hat{K} = \hat{H}$，大正準集団では $\hat{K} = \hat{H} - \mu\hat{N}$ と置く (式 (11.1))．両者を区別したい場合には，後者に対して“大[正準]分配関数”の呼称を用い，$\mathcal{Z}$ の代わりに $\mathcal{Z}_{\mathrm{G}}$ もしくは Ξ と表記するのが通例であるが，本書の記述ではこのような区別があまり明確ではない．

[‡](訳註) Ω を熱力学ポテンシャル (thermodynamic potential) と呼ぶことがあるが，この術語は他の各種熱力学関数を指す場合もそれぞれあって，用法が一定していない．

Fermi粒子系では，各状態の占有数がゼロもしくは1にしかならないので，占有数に関する和は，初めの2つの項だけを残せばよい．

$$\mathcal{Z} = \prod_n \left(1 + e^{\beta(\mu - E_n)}\right) \tag{11.6}$$

非相対論的な自由Fermi粒子系では，次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \exp\left\{+\mathrm{Vol}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 + e^{\beta(\mu - k^2/2m)}\right)\right\} \tag{11.7}$$

$$\Omega = -(\mathrm{Vol})\frac{1}{\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(1 + e^{\beta(\mu - k^2/2m)}\right) \tag{11.8}$$

熱力学によると，任意の多体系における大正準ポテンシャル Ω は $-P(\mathrm{Vol})$ に等しい．P は圧力である．$\ln(x)$ が $x < 1$ において負なので，式(11.8)と式(11.5)の右辺の符号から，圧力が正になることが見てとれる．

単一粒子のエネルギー準位から多体のエネルギーを考える方法は，Bose粒子系とFermi粒子系で違いがある．しかし式(11.3)と式(11.7)に見られる明白な類似性は，これらを統一的に扱うことも可能であることを示唆する．これを次節で扱うことにする．

11.2 世界線

前章までは第二量子化されたBose粒子系とFermi粒子系の統計を，粒子を生成する場の演算子の交換関係によって説明した．しかし場合によっては，粒子の世界線を扱う描像を直接用いるほうが，直観的に理解しやすいであろう．この節の議論はFeynmanによるもので，彼の“各径路の総和”による量子力学の再定式化の議論にも関係している．

識別可能で非相対論的なひと組の粒子の中のひとつが，“Euclid時間”τ をかけて y から x へ移動する振幅を，$G(x,y,\tau)$ と表す．我々は後で汎関数積分を学ぶとき，これが y から x へ移動する可能な各径路からの寄与の総和の形で与えられることを見ることになるが，どのような方法でこの振幅を導くにしても，これは時間を虚数化したSchrödinger方程式に従う．

$$\frac{1}{2m}\partial_x^2 G(x,y,\tau) = \partial_\tau G(x,y,\tau) \tag{11.9}$$

初期条件は，次のようになる．

$$G(x,y,\tau) \to \delta(x-y) \quad \text{as} \quad \tau \to 0_+ \tag{11.10}$$

たとえばFermi粒子系の，温度 $T = 1/\beta$ における大分配関数，

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left[e^{\beta\mu\hat{N}}e^{-\beta\hat{H}}\right] \tag{11.11}$$

を得るには，Euclid時間に関して周期 β を持つ，いろいろの周期的な履歴を足し合わせなければならない．ここで“周期的”とは，系の“状態”が0と β で同じであるが，各粒子を識別できないので，粒子の最後の配置は，最初の状態の粒子に任意の“置換”(permutation)を施したものになっていることを意味する．Feynmanは Fermi粒子系について，n 個の粒子の置換群 S_n の各置換に対応する $\pm$ の符号を含めて和を実行するように決めている．

$$\mathcal{Z} = \sum_n \frac{1}{n!}e^{\beta\mu n}\sum_{P\in S_n}\mathrm{sgn}(P)\int d^3x_1\ldots d^3x_n G(x_{P(1)},x_1)\ldots G(x_{P(n)},x_n) \tag{11.12}$$

S_n における任意の置換を“巡回”(cycle)によって再構成することができる．すなわち r_1 個の1要素巡回，r_2 個の2要素巡回$\cdots\cdot$という具合で，$\sum mr_m = n$ となる．たとえば，

$$P = (14632)(78) \in S_8 \tag{11.13}$$

という置換は，ひとつの1要素巡回(5がひとつだけ置換されない)，ひとつの2要素巡回および，ひとつの5要素巡回から成る．

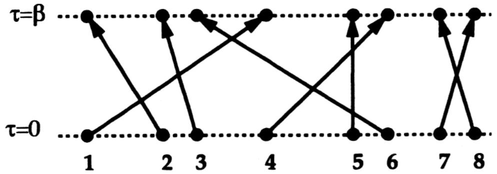


図 11.1　置換の例 $(14632)(78) \in S_8$

置換に伴う符号 sgn(P) は，次の多項式，

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \tag{11.14}$$

に対する置換の効果として定義される．置換 $P:\{x_n\}\to\{x_{P(n)}\}$ によって f の符号が変わるならば $\mathrm{sgn}(P) = -1$ であり，その置換は“奇”(odd)であると言う．また置換によって f の符号が変わらないなら $\mathrm{sgn}(P) = +1$ であり，その置換は“偶”(even)であると言う．偶の置換だけを集めたものは，S_n の部分群を形成する．次

の関係が容易に導かれる.

$$\mathrm{sgn}(P) = (+1)^{r_1}(-1)^{r_2}(+1)^{r_3}\ldots \tag{11.15}$$

2つの置換 P_1, P_2 が同じ巡回の型を持つとき，これらの置換は同じ“共役類”に属すると言い，この場合 $P_1 = P^{-1}P_2P$ となるような P が存在する．r_i によって決まる類における巡回の数は,

$$N(r_1, r_2, \ldots, r_m) = \frac{n!}{1^{r_1}2^{r_2}\ldots m^{r_m} r_1! r_2! \ldots r_m!} \tag{11.16}$$

である．置換に関する上記のような知識を用いると，式(11.12)を次のように書くことができる.

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{\mu\beta n}\frac{1}{n!}\Big[(\mathrm{Tr}G)^{r_1}(-\mathrm{Tr}G^2)^{r_2}\ldots\big((-1)^{m+1}\mathrm{Tr}G^m\big)^{r_m}\Big]N(r_1,\ldots,r_m) \tag{11.17}$$

$$\mathrm{Tr}G^2 = \int d^3x_1 d^3x_2 G(x_1,x_2)G(x_2,x_1), \quad \text{etc.} \tag{11.18}$$

n に関する和は $\sum mr_m = n$ の制約の下で実行する．これが，化学ポテンシャルや大正準ポテンシャルが有用となる理由である.

$$\mathcal{Z} = \sum_{r_i}\frac{1}{r_1!}\left[e^{\mu\beta}\mathrm{Tr}G(+1)\right]^{r_1}\ldots\frac{1}{r_m!}\left[\frac{1}{m}e^{m\mu\beta}\mathrm{Tr}G^m(-1)^{m+1}\right]^{r_m}\ldots \tag{11.19}$$

$$= \exp\sum_m \frac{1}{m}e^{\mu\beta m}(-1)^{m+1}\mathrm{Tr}G^m \tag{11.20}$$

$$= \exp\left[\mathrm{Tr}\ln(1+e^{\mu\beta}G)\right] \tag{11.21}$$

x に関するトレース (固有和) は，$\mathbf{R}^3$ 上で作られる関数のHilbert空間における任意の基底を用いて評価してよい．平面波の基底を用いると，G は対角的に表され，対角要素は $\exp(-\beta k^2/2m)$ なので，大分配関数は次のようになる.

$$\mathcal{Z} = \exp\,(\mathrm{Vol})\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ln(1+e^{\mu\beta}e^{-\beta k^2/2m}) \tag{11.22}$$

この式(11.22)は，自由Fermi粒子系の正確な大分配関数である．$G(x,y,\tau)$ という量はもちろん，熱方程式のGreen関数である．ここまでの式における G の高次の冪(べき)は，熱方程式を周 β の円筒上で解くときに，“像源”(image source) から生じるものと考えることができる．G^{n+1} は，y を発してから n 回円筒を周回して x に到達する“熱”によるものである．G の冪に付随するマイナス符号は，円筒上の熱方程式に“反周期境界条件”(antiperiodic boundary condition) を課すること，すな

わち“熱”が“周回”すると符号が変わることに対応する．後から我々は，反周期境界条件を持つGrassmann場の径路積分からも，分配関数が得られることを示す．これにより直接 $\det(1+e^{\mu}G)$ が与えられ，行列式を e^{μ} の冪に展開することにより，よく知られた恒等式 $\ln\det(1+e^{\mu}G) = \mathrm{Tr}\ln(1+e^{\mu}G)$ を示すことができる．

Bose粒子系の大分配関数は，$\mathrm{sgn}(P)$ を省いて，

$$\mathcal{Z} = \exp\left[-\mathrm{Tr}\ln(1-e^{\mu\beta}G)\right] \tag{11.23}$$

と表される．相互作用を含めるためには，$G(x,y,\tau)$ を径路積分で表し，径路間に相互作用を導入すればよい．

低温では粒子が十分に遍歴して，識別性を失うだけの“時間”が与えられるので，異なる置換に対応する符号の違いが重要になるのは低温の場合である．自由なBose粒子系では，トレースが意味を成すために，μ が負もしくはゼロでなければならない．$\mu=0$ におけるBose凝縮は，時間の円環面 (torus) を何回でも任意の回数だけまわるような，長い世界線のループが生じることに対応する．これが起こると任意のBose粒子は他の任意のBose粒子と同じになり，$\varphi^{\dagger}(x)$ によって点 x に生成させた世界線を，これと十分離れた x' における $\varphi(x')$ で終端させることができるようになる．したがって相関関数 $\langle\varphi^{\dagger}\varphi\rangle$ に“長距離秩序”(long range order) が生じる．Fermi粒子系ではこれとは異なり，μ が正になる．$\mu>0$ では級数が収束しなくなるが，総和に対する表式は正当性を保ち，縮退したFermi気体を記述する．

11.3 松原の和

第5章においてBose粒子場の真空エネルギー密度を，次のEuclid空間内の積分で表したことを思い起こそう．

$$\mathcal{E}(m^2) = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln(k^2+m^2) \tag{11.24}$$

これを通常の $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の式に関係づけるには，まず m^2 に関する微分を施す．

$$\frac{\partial\mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+m^2} \tag{11.25}$$

それから k_0 に関する積分を実行する．

$$\frac{\partial\mathcal{E}(m^2)}{\partial m^2} = \frac{1}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \tag{11.26}$$

そして m^2 について積分をすれば，

$$\mathcal{E}(m^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{11.27}$$

のように，m に依存しない定数部分を除いた真空エネルギー密度が与えられる．

前節の議論によると，絶対零度以外の温度では，Euclid時間 τ が $\tau \sim \tau + \beta$ の周期を持つものと見なすのが適当である．有限の周期を持つために，連続変数 k_0 に関するFourier積分が，離散的な“松原振動数”(Matsubara frequencies) $k_0 \to \omega_n = 2\pi n/\beta$ に関するFourier級数に置き換わる．積分から和への変換は，次のようになる．

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0) \;\to\; \frac{1}{\beta}\sum_n f(\omega_n) \tag{11.28}$$

次の恒等式，

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{z}\coth \pi z \tag{11.29}$$

を用いると，次の関係が見いだされる．

$$\sum_n \frac{1}{\left(\dfrac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}\coth \frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{11.30}$$

これは，次の式を m^2 について微分したものになっている．

$$\ln \sinh \frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} + \ln\left(1 - e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}\right) \tag{11.31}$$

有限温度の“真空エネルギー”積分が，真空のゼロ点エネルギーと，相対論的Bose粒子気体の大正準ポテンシャルの和の形で表された．

Diracの Fermi粒子の場合，絶対零度の真空エネルギーは (Wick回転と Euclid時空のガンマ行列によって)，

$$\mathcal{E}(m) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\ln(i\not{k} + m) \tag{11.32}$$

となる．ここでのトレースは，ガンマ行列のスピノル添字に関する固有和で，マイナス符号は，閉じたFermi粒子のループによる (−1) 因子である．Ouroborosのダイヤグラムにおける Fermi粒子線は方向を持つので，1/2 の因子が付かない．上式を評価するために，次の関係に注意する．

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left\{\ln(i\not{k} + m)\right\} &= \mathrm{tr}\left\{\gamma_5^2 \ln(i\not{k} + m)\right\} \\ &= \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 \ln(i\not{k} + m)\gamma_5\right\} = \mathrm{tr}\left\{\ln(-i\not{k} + m)\right\}\end{aligned} \tag{11.33}$$

$$\begin{aligned}\ln(i\not{k} + m) + \ln(-i\not{k} + m) &= \ln(i\not{k} + m)(-i\not{k} + m) \\ &= \ln(k^2 + m^2)\end{aligned} \tag{11.34}$$

後の式で暗黙のうちに想定されている単位行列のトレースから，因子 4 が現れるので，

$$\mathcal{E}(m) = -2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k^2 + m^2) \tag{11.35}$$

となる．絶対零度のBose粒子系の真空エネルギーも，同様の手続きにより，

$$\mathcal{E}(m) = -2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{11.36}$$

と与えられる．これはDiracの海における状態の (負の) エネルギーの和と解釈できる[1)]．因子 2 は，スピンの向きが 2 通りあることを表す．

有限温度では k_0 の積分を松原の和に置き換えるが，このとき“反周期境界条件”を満たす離散的な振動数一式を用いることになる．これは前節で見たように，Fermi 統計から現れるマイナス符号が，外周 τ の円筒において，像電荷の符号を変えることと等価であるという事情と整合している．したがって $k_0 \;\to\; \omega_n = 2\pi(n+\frac{1}{2})/\beta$ となる．この和を評価するために，次の恒等式を用いる．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + z^2} = \frac{\pi}{z}\tanh \pi z \tag{11.37}$$

上式により，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}}\,\Omega = -\frac{4}{\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\cosh\frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{11.38}$$

もしくは，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}}\,\Omega = -4\,\frac{1}{\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} + \ln\left(1 + e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\right) \right\} \tag{11.39}$$

の関係が導かれる．ここでもまた，2 種類のスピンと 2 種類の電荷を持つ相対論的な粒子系の絶対零度の真空エネルギーの寄与と，大正準ポテンシャルの和の形で，有限温度の自由エネルギーが表される．

[1)] 粒子と反粒子には完全な対称性がある．これは陽電子が電子の海における空孔であると考えても，電子が陽電子の海における空孔であると考えてもよいことを意味する．どちらの描像を採用しても同じ真空エネルギー密度が導かれる．

第 12 章　径路積分

本章ではFeynmanの径路積分 (path integral. 経路積分とも書く) を紹介する．伝統的な正準形式の量子力学から径路積分の形式を導くが，この導出は，径路積分が量子力学のある種の問題を解くための便法に過ぎないという印象を与えるかも知れない．しかし読者は，この技法に慣れ親しむにつれて，おそらく径路積分の技法こそが物理の本質を捉えたものであり，むしろハミルトニアンとHilbert空間を用いる伝統的な方法は，径路積分を評価するための数学的な便法に過ぎないというFeynmanの考え方にも共感を持てるようになるかもしれない．

12.1　1粒子の量子力学

12.1.1　実時間

1粒子の量子力学における伝播関数 $G(x_2, x_1, t)$ は，点 x_1 を発した粒子が，時間 t の後に点 x_2 で見いだされる振幅を表す．ハミルトニアンが，

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\partial_x^2 + V(x) \tag{12.1}$$

という単純な形を持つならば，G は時間に依存するSchrödinger方程式に従う．

$$i\partial_t G(x_2, x_1, t) = \Big(-\frac{1}{2m}\partial_{x_2}^2 + V(x_2)\Big)G(x_2, x_1, t) \tag{12.2}$$

初期条件は，次のように与えられる．

$$G(x_2, x_1, 0) = \delta(x_1 - x_2) \tag{12.3}$$

この初期値問題に対する解を，規格化されたエネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ を用いて，

$$G(x_2, x_1, t) = \sum_n \varphi_n(x_2)\varphi_n^*(x_1)e^{-iE_n t} \tag{12.4}$$

と書くことができる．これをDiracの表記法 $\varphi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle$ に従って書き直すと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
G(x_2, x_1, t) &= \sum_n \langle x_2|n\rangle e^{-iE_n t}\langle n|x_1\rangle \\
&= \langle x_2|e^{-i\hat{H}t}|x_1\rangle \\
&= \langle x_2, t|x_1, 0\rangle
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

上式には微妙な問題がある．$|x,t\rangle$ は時刻 t に依存するにもかかわらず"Heisenberg描像の状態"である．正確を期するために，ケット $|x,t\rangle$ を，Heisenberg演算子，

$$
\hat{x}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t} \tag{12.6}
$$

の，固有値 x を持つ固有状態と定義しよう．これに従うと，異なる t における $|x,t\rangle$ は次式で関係づけられる．

$$
|x,t\rangle = e^{i\hat{H}t}|x,0\rangle \tag{12.7}
$$

指数の符号が，単純に予想されるものとは反対であることに注意されたい．この t 依存性は，特定の状態の時間発展を表すのではなく，t で識別される各状態——$t=t'$ の瞬間における $\hat{x}(t')$ の固有状態に対して，ラベル t' が与えられる——の間の関係を表している．この意味において，これらの状態は第6章における $|\mathbf{k};\mathrm{in}\rangle$ や $|\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle$ と類似したものである．式(12.7)における"後ろ向きの時間発展"は，一見矛盾するように見えた $|\mathbf{k};\mathrm{in}\rangle = S|\mathbf{p};\mathrm{out}\rangle$ の関係に通じるものである．

この状態を，次のように展開することができる．

$$
|x,t\rangle = \sum_n e^{iE_n t}|n\rangle\langle n|x\rangle \tag{12.8}
$$

$$
\langle x,t| = \sum_n e^{-iE_n t}\langle x|n\rangle\langle n| \tag{12.9}
$$

したがって，たとえば次のような関係が成立する[1]．

$$
\langle x,t|n\rangle = \varphi_n(x)\, e^{-iE_n t} \tag{12.11}
$$

Feynmanの径路積分は $\langle x_2, t|x_1, 0\rangle$ のような振幅を，粒子が時間 t をかけて x_1 から x_2 へ到達するような，すべての可能な径路による寄与の総和として表現するも

[1] 同じ関係をSchrödinger描像の表記法に直すと次のようになる．

$$
\langle x|n,t\rangle_{\mathrm{S}} = \varphi_n(x)e^{-iE_n t} \tag{12.10}
$$

のである．径路積分の基本的な表式を導くために，再び次の単純なハミルトニアンを仮定する．

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x}) \tag{12.12}$$

まず全経過時間 $(t,0)$ を，N 個の小さな時間区間 δt に分割して次のように書く．

$$\begin{aligned}\langle x_N|e^{-i\hat{H}t}|x_0\rangle &= \langle x_N|e^{-i\delta t\hat{H}}e^{-i\delta t\hat{H}}\ldots e^{-i\delta t\hat{H}}|x_0\rangle \\ &= \int dx_{N-1}dx_{N-2}\ldots dx_1 \\ &\quad\times \langle x_N|e^{-i\hat{H}\delta t}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|e^{-i\hat{H}\delta t}|x_{N-2}\rangle\ldots\langle x_1|e^{-i\hat{H}\delta t}|x_0\rangle\end{aligned} \tag{12.13}$$

これらの因子，たとえば $\langle x_1|e^{-i\hat{H}\delta t}|x_0\rangle$ について見てみよう．演算子を次のように分解する．

$$e^{-i\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2+V(\hat{x})\right)\delta t} = e^{-i\delta t\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2\right)}e^{-i\delta tV(\hat{x})}e^{-iO(\delta t^2)} \tag{12.14}$$

ここで $O(\delta t^2)$ を無視して，各因子を評価する．

$$\begin{aligned}&\langle x_1|e^{-i\delta t\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2\right)}e^{-i\delta tV(\hat{x})}|x_0\rangle \\ &\quad= \int dx\int\frac{dp}{2\pi}\int\frac{dp'}{2\pi}\langle x_1|p\rangle\langle p|e^{-i\delta t\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2\right)}|p'\rangle\langle p'|x\rangle\langle x|e^{-i\delta tV(\hat{x})}|x_0\rangle \\ &\quad= \int\frac{dp}{2\pi}\langle x_1|p\rangle\langle p|x_0\rangle\, e^{-i\delta t\left(\frac{1}{2m}p^2\right)}e^{-i\delta tV(x_0)} \\ &\quad= \int\frac{dp}{2\pi}\, e^{ip(x_1-x_0)}\, e^{-i\delta t\left(\frac{1}{2m}p^2\right)}e^{-i\delta tV(x_0)}\end{aligned} \tag{12.15}$$

Fresnel積分を実行すると，次式が得られる．

$$\langle x_1|e^{-i\hat{H}\delta t}|x_0\rangle = e^{-i\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2m\pi}{\delta t}}\exp i\delta t\left\{\frac{m(x_1-x_0)^2}{2(\delta t)^2} - V(x_0)\right\} \tag{12.16}$$

したがって伝播関数は，近似的に次のように表される．

$$\langle x_N, t|x_0, 0\rangle \approx \mathcal{N}\int dx_{N-1}dx_{N-2}\ldots dx_1\, e^{i\delta t\sum_i\left\{\frac{m(x_{i+1}-x_i)^2}{2(\delta t)^2}-V(x_i)\right\}} \tag{12.17}$$

$\mathcal{N}$ は $\sqrt{m/2\pi\delta t}$ の因子を N 個含む規格化定数である．

δt を小さくすると近似の精度が良くなり，因子数が増えても $O(\delta t^2)$ の誤差が病的に蓄積しないならば，終点 x_N を $x_N = x_t$ に固定したまま $N\to\infty$，$\delta t\to 0$ という極限操作を施すことができる．x_i の系列によって形成される軌道が滑らかであれば，次のようになる．

$$i\delta t\sum_i\left\{\frac{m(x_{i+1}-x_i)^2}{2(\delta t)^2} - V(x_i)\right\} \;\to\; i\int_0^t dt\left\{\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right\} \tag{12.18}$$

このことを踏まえて，無限次元の積分を次のように表記する．

$$\langle x_t, t|x_0, 0\rangle = \mathcal{N}\int_{x_0}^{x_t} d[x(t)]\, e^{i\int_0^t dt\left\{\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(x)\right\}} \tag{12.19}$$

ここで $d[x(t)]$ は，

$$\lim_{N\to\infty} dx_{N-1}dx_{N-2}\ldots dx_1 \tag{12.20}$$

を省略したものであり，径路 $x(t)$ の“体積要素”もしくは“測度”(measure) と見ることができる†．極限操作を行うと $\mathcal{N}$ は無数の因子を含むことになって発散する．これらの因子を記号 $d[x(t)]$ に含めて省略することもできるが，$\mathcal{N}$ を残しておいても，物理量を計算する際に発散は相殺される．

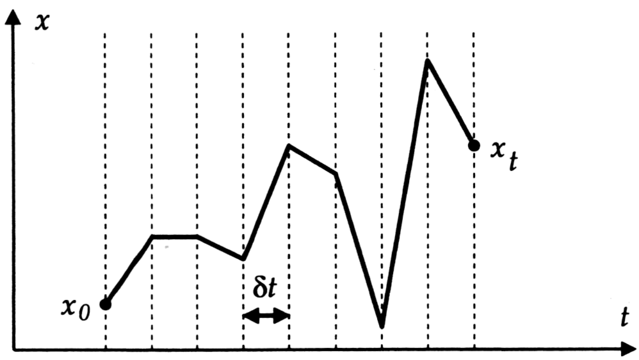


図 12.1　径路の例．

伝播関数 (12.4) を $\hbar$ を明示した径路積分で表すと，次のようになる．

$$\langle x_2, t|x_1, 0\rangle = \mathcal{N}\int_{x_1(0)}^{x_2(t)} d[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \tag{12.21}$$

指数の $S[x(t)]$ は，和の中に現れる各々の径路 $x(t)$ に関する“古典的な”作用である．

指数に古典的な作用量と $\hbar$ の比が現れることは，$\hbar$ が小さくて，径路積分がほとんど，最も安定な単一の軌道だけに支配されるという近似の下で，古典力学における最小作用の原理が成立することを示している．

12.1.2　Euclid時間

Fresnel積分の中の虚数単位 i は，径路空間における測度に問題を生じ，径路積分の数値計算を非常に困難なものにする．多くの応用例において，Minkowski空間に

†(訳註) $\mathcal{N}\int d[x(t)]\ldots$ の代わりに $\int \mathcal{D}x\ldots$ と表記する文献が多い．

おける伝播関数をEuclid空間のそれに移行させると扱い易くなる．t を $-i\tau$ に置き換え，Euclid時間 τ を実数と考える．そうすると次のようになる．

$$\begin{aligned}\langle x_2|e^{-\hat{H}\tau}|x_1\rangle &= \sum_n \varphi_n(x_2)\varphi_n^*(x_1)e^{-E_n\tau} \\ &= \mathcal{N}\int_{x_1(0)}^{x_2(\tau)} d[x(\tau)]\, e^{-\int_0^\tau d\tau\left\{\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)\right\}}\end{aligned} \tag{12.22}$$

$\dot{x}$ は $dx/d\tau$ を意味する．作用の中の運動エネルギー項とポテンシャル項の相対的な符号が変わったことに注意されたい‡.

式(12.22)は，式(12.19)よりも数学的に扱いやすい．新しい指数関数は，ぎざぎざの径路を抑制する傾向を持つ．しかし"典型的な"径路 $x(\tau)$ は連続関数であっても微分可能ではない．指数に現れる $\dot{x}^2$ は文字通りの意味のものではない．式(12.22)は実際の多重積分を容易に記憶するための省略記法なのである．

虚時間に関する形而上学的な思弁は(その誘惑は強いけれども)控えておこう．式(12.22)は，通常の実時間の世界における波動関数やエネルギー等のさまざまな量を導き出すための，形式的な公式であると考えてもらいたい．

この式の直接的な応用例のひとつは，基底状態のエネルギーに対する"Feynman-Kac公式"である．

$$E_0 = \lim_{T\to\infty}\left\{-\frac{1}{T}\ln\int_{x_1(0)}^{x_2(T)} d[x(\tau)]\, e^{-\int_0^T d\tau\left\{\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)\right\}}\right\} \tag{12.23}$$

T が大きいと，最低エネルギー状態が，和 $\sum_n \varphi_n(x_2)\varphi_n^*(x_1)\exp\{-E_n\tau\}$ を支配することから，この公式が成立する．対数を取ると，結果は端点 x_1 と x_2 の値の選択には無関係に決まる．ここで求まる E_0 は，通常の"実時間における"Schrödinger方程式の基底エネルギーである．虚時間を用いた計算は，実時間での結果を導くための便法に過ぎない．

Euclid世界におけるHeisenberg演算子 $\hat{x}(\tau)$ の時間発展は，次式で定義される．

$$\hat{x}(\tau) = e^{\hat{H}\tau}\hat{x}(0)e^{-\hat{H}\tau} \tag{12.24}$$

したがって，それぞれの τ に対応するHeisenberg状態一式は，相互に，

$$\langle x,\tau| = \langle x,0|e^{-\hat{H}\tau}, \quad |x,\tau\rangle = e^{\hat{H}\tau}|x,0\rangle \tag{12.25}$$

‡(訳註) Euclid時空への移行に伴って，指数の部分で時間積分する関数が，Lagrange関数 $T(\dot{x})-V(x)$ から負号付きのエネルギー $-\{T(\dot{x})+V(x)\}$ に代わる．このことにより，統計力学との間に，数学的構造の類似関係が生じる (p.170参照).

という関係を持つ．τ に関する発展はユニタリーではなく，$|x,\tau\rangle$ は規格化されていない．それでも単位元の分解に利用することはできる．

$$\int dx|x,\tau\rangle\langle x,\tau| = \int dx\, e^{\hat{H}\tau}|x,0\rangle\langle x,0|e^{-\hat{H}\tau} = e^{\hat{H}\tau}\cdot I\cdot e^{-\hat{H}\tau} = I \tag{12.26}$$

また，測度を次のようにおくこともできる．

$$d\mu[x(\tau)] = d[x(\tau)]\, e^{-\int d\tau \frac{m\dot{x}^2}{2}} \tag{12.27}$$

この $d\mu[x(\tau)]$ は，径路空間における " Wiener[2)]測度 " (Wiener measure) と呼ばれている．Wiener測度は元々，Langevin方程式を扱い，酔歩 (random walk) や拡散の問題を調べるために考えられたものである．これについては後から論じる．

12.2　ゲージ不変性と演算子の順序

径路積分の方法は物理を非常に見通しのよいものにする．この技法は任意の古典的な作用に対して，量子力学系が一意的に存在することを意味しているように見える．しかしこれは正しくない．この微妙な問題を調べるためには，外場を導入して径路積分を一般化してみるとよい．磁場中にある電荷 e の 1 粒子に対する古典的なラグランジアンは，

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x) + e\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} \tag{12.28}$$

である．径路積分を用いて (Euclid時間に関する) Schrödinger方程式を導いてみよう．次の振幅関数が従う方程式を探すことにする．

$$\psi(x,\tau) = \mathcal{N}\int_{x(0)}^{x(\tau)} d[x(\tau)]\, e^{-\int d\tau\left\{\frac{\dot{x}^2}{2}+V(x)-ie\sum_\mu A_\mu\dot{x}_\mu\right\}} \tag{12.29}$$

Euclid時間を用いても，ゲージ場との結合項は虚数となっていることに注意されたい．これは次の関係によるものである．

$$i\int dt\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} = i\int d\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} = i\int d\tau\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \tag{12.30}$$

ここで径路積分を，次のように離散化する．

$$\lim_{\delta\tau\to 0}\int\prod_i\left[\frac{d^3x_i}{(2\pi\delta\tau)^{3/2}}\right] e^{-\sum_i\left\{\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\delta\tau}+V(x_i)\delta\tau-ie(x_{i+1}-x_i)^\mu A_\mu(\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i))\right\}} \tag{12.31}$$

2)Norbert Wiener：1894年11月26日 Columbia (ミズーリ州) 生まれ．1964年3月18日 Stockholm (スウェーデン) にて死去．

A_μ については，区間 (x_{i+1}, x_i) の“中点”の値を取っている．後から明らかになるが，この扱い方は決定的な重要性を持っている．これに比べて V の値を取る方法は，さほど重要ではない．中間変数 x_i について最後のもの以外すべての積分を実行すると，次のようになる．

$$\psi(x, \tau + \delta\tau) = \int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{\eta^2}{2\delta\tau} - V(x)\delta\tau - ie\eta^\mu A_\mu(x + \frac{1}{2}\eta)} \psi(x + \eta, \tau) \tag{12.32}$$

ここから次式が得られる．

$$\begin{aligned}\psi(x, \tau + \delta\tau) = \int & \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{\eta^2}{2\delta\tau}} \\ & \times \left(\psi(x, \tau) + \eta_\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\eta_\mu \eta_\nu \partial^2_{\mu\nu}\psi \ldots\right) \\ & \times \left(1 - V(x)\delta\tau + \ldots\right) \\ & \times \left(1 - ie\eta^\mu A_\mu + \frac{(ie)^2}{2}\eta^\mu A_\mu \eta^\nu A_\nu - ie\eta^\mu \frac{\eta^\nu}{2}\partial_\nu A_\mu + \ldots\right)\end{aligned} \tag{12.33}$$

最後の括弧内に現れている $\frac{1}{2}$ の因子は，先程 A_μ の項を離散化したときに採用した“中点則”(midpoint rule) によって生じている．上記の表式において，私は $O(\delta\tau)$ 程度のすべての項を残した——Gauss積分によって η が大きくなり過ぎることは抑制されるので，$O(\delta\tau) \sim O(\eta^2)$ である．ここで，

$$\int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau)^{3/2}}\, e^{-\eta^2/2\delta\tau} = 1 \tag{12.34}$$

$$\int \frac{d^3\eta}{(2\pi\delta\tau)^{3/2}}\, e^{-\eta^2/2\delta\tau}\eta^\mu\eta^\nu = \delta\tau\delta^{\mu\nu} \tag{12.35}$$

なので，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\psi(x, \tau + \delta\tau) \\ &\quad = \psi(x, \tau) + \left\{\frac{1}{2}\nabla^2\psi - V\psi + \frac{(ie)^2}{2}A_\mu A_\mu \psi - ieA_\mu \partial\psi - \frac{ie}{2}(\partial_\mu A_\mu)\psi\right\}\delta\tau\end{aligned} \tag{12.36}$$

これを書き直すと，

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}(\partial_\mu - ieA_\mu)^2\psi - V\psi \tag{12.37}$$

となる．これはEuclid時間に関するゲージ不変なSchrödinger方程式である．$A_\mu(x)$ の評価を各区間の“中点”で行ったことの重要性に注意してもらいたい．中点則を採らないと，各項をゲージ共変な微分の形にすることができない．

中点則が必要となる理由は，ゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ に伴って次のようになることが要請されるからである．

$$
\begin{aligned}
&\int d[x(\tau)]\, e^{-\int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - ie(A_\mu + \partial_\mu \Lambda)\dot{x}_\mu \right\}} \\
&= \int d[x(\tau)]\, e^{-\int \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - ieA_\mu \dot{x}_\mu \right\} d\tau + ie\int \partial_\mu \Lambda dx^\mu} \\
&= \int d[x(\tau)]\, e^{-\int \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - ieA_\mu \dot{x}_\mu \right\} d\tau}\, e^{ie\{\Lambda(x,\tau) - \Lambda(0,0)\}}
\end{aligned}
\tag{12.38}
$$

しかし一般に，単純な計算操作，

$$
\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\Lambda}{dx}\dot{x}d\tau = \int_{x(\tau_1)}^{x(\tau_2)} \frac{d\Lambda}{dx}dx = \Lambda\big(x(\tau_2)\big) - \Lambda\big(x(\tau_1)\big) \tag{12.39}
$$

は，拡散過程で $\delta x = O(\sqrt{\delta\tau})$ であるために，正しい結果を与えない．中点則を用いることにすれば，

$$
\Lambda(x+a) = \Lambda(x) + a\, \frac{d\Lambda}{dx}\bigg|_{x+\frac{1}{2}a} + O(a^3) \tag{12.40}
$$

となり，$O(a^2)$ の誤差が現れないので，十分に正確な結果が得られる．

一般に，径路積分に対する異なる離散化のやり方は，ハミルトニアンの中の非可換な演算子積の異なる順序化に対応するものと考えられる．量子化すべき作用量が新たに与えられた場合，できるだけ望ましい対称性を残すという観点が，離散化の方法を選ぶ指針となる．

12.3 1粒子系の相関関数

場の理論における“Green関数”は，Heisenberg演算子の積を時間順序化したもの (時間はEuclid時間でもMinkowski時間でもよい) の真空期待値である．

$$
G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0|\, T\big\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\big\}|0\rangle \tag{12.41}
$$

場は一般に $d-1$ 次元空間と1次元時間を持つ時空において定義される．量子力学は“0次元空間”と1次元時間から成る“時空”に関する場の理論と見なすことができる．この見地からすると，変数 $\hat{x}(\tau)$ が場 $\hat{\varphi}(x)$ の役割を担っている．したがって量子力学で，n 点Green関数に相当する量は，

$$
G^{(n)}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \langle 0|\, T\big\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\big\}|0\rangle \tag{12.42}
$$

である．$|0\rangle$ は基底状態である．

径路積分は，

$$\langle x_T, T|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|x_{-T}, -T\rangle \tag{12.43}$$

のような量を計算する方法を与える．ここでは基底状態の代わりに，固有値 x_T および x_{-T} を持つ $\hat{x}$ の固有状態が用いられている．Euclid時間の下で $T > \tau_n > \tau_{n-1} > \ldots > \tau_1 > -T$ とおいて，径路積分の方法を見いだすことにする．

$$\begin{aligned}
&\langle x_T, T|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|x_{-T}, -T\rangle \\
&= \int dx(\tau_n)\ldots dx(\tau_1) \\
&\qquad \times \left\langle x_T, T\middle|\hat{x}(\tau_n)\middle|x(\tau_n), \tau_n\right\rangle \left\langle x(\tau_n), \tau_n\middle|\hat{x}(\tau_{n-1})\middle|x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}\right\rangle \\
&\qquad \times \left\langle x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}\right| \quad \ldots \quad \left|x_0\right\rangle
\end{aligned} \tag{12.44}$$

中間状態として，それぞれの演算子 $\hat{x}(\tau_n)$ の後ろに，その固有状態を挿入してある．したがって各演算子を固有値に置き換えて，式を書き直すことができる．

$$\begin{aligned}
&\int dx(\tau_n)\ldots dx(\tau_1) \\
&\qquad \times \left\langle x_T, T\middle|x(\tau_n), \tau_n\right\rangle x(\tau_n) \left\langle x(\tau_n), \tau_n\middle|x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}\right\rangle x(\tau_{n-1}) \\
&\qquad \times \left\langle x(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}\right| \quad \ldots \quad \left|x_0\right\rangle \\
&= \mathcal{N}\int_{x_{-T}}^{x_T} d[x(\tau)]\left\{x(\tau_n)x(\tau_{n-1})\ldots x(\tau_1)\right\} e^{-\int d\tau\left\{\frac{m\dot{x}^2}{2}+V(x)\right\}}
\end{aligned} \tag{12.45}$$

最後の式では $\left\langle x(\tau_i), \tau_i\middle|x(\tau_{i-1}), \tau_{i-1}\right\rangle$ のような因子の積を，径路積分表示に直し，$n+1$ 個の区間を中間の $x(\tau_i)$ でつないで，x_{-T} から x_T までの全積分を構成するようにした．

径路積分に現れるそれぞれの $x(\tau_m)$ は，普通の“数”であることに注意されたい．これらを書く順序は任意である．

ここで用いられている初期状態と終状態は，

$$|x_{-T}, -T\rangle = e^{-\hat{H}T}|x_{-T}\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|x_{-T}\rangle e^{-E_nT} \tag{12.46}$$

$$\langle x_T, T| = e^{-\hat{H}T}\langle x_T| = \sum_n e^{-E_nT}\langle x_T|n\rangle\langle n| \tag{12.47}$$

であり，$T\to\infty$ とすると，これらの状態は主として基底状態の成分によって占められることになる．したがって，次の近似が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\langle x_T, T|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|x_{-T}, -T\rangle \\
&\qquad \approx \langle x_T|0\rangle\langle 0|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|0\rangle\langle 0|x_{-T}\rangle e^{-2E_0T}
\end{aligned} \tag{12.48}$$

上式を $\langle x_T, T|x_{-T}, -T\rangle$ で割ることによって $\langle x_T|0\rangle$ と $\langle 0|x_{-T}\rangle$ を除き，同時に不要な真空エネルギー因子を消去できる．こうすると次式が得られる．

$$\langle 0|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|0\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{\langle x_T, T|\,T\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\}|x_{-T}, -T\rangle}{\langle x_T, T|x_{-T}, -T\rangle} \tag{12.49}$$

これで，次の定理が証明された．

定理： Euclid時空におけるGreen関数は，次のように与えられる．

$$\langle 0|\,T\big\{\hat{x}(\tau_1)\ldots\hat{x}(\tau_n)\big\}|0\rangle = \frac{1}{Z}\int_{x(-\infty)}^{x(\infty)} d[x(\tau)]\big\{x(\tau_n)x(\tau_{n-1})\ldots x(\tau_0)\big\}e^{-S[x]} \tag{12.50}$$

$$S[x] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\Big\{\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\Big\} \tag{12.51}$$

$$Z = \int_{x(-\infty)}^{x(\infty)} d[x(\tau)]\, e^{-S[x]} \tag{12.52}$$

注意： 上式を統計力学における変数の熱平均の式と比べてもらいたい．

$$\langle X_1X_2\ldots X_N\rangle = \frac{1}{Z}\sum\{X_1X_2\ldots X_N\}\,e^{-\beta H} \tag{12.53}$$

径路積分形式では複雑な演算子がすべて消え，Green関数が1本の“弾性弦”に関する古典的な“統計力学”の形で表現されていることが見てとれる†．

12.4 場の相関関数

前節の量子力学の結果を d 次元の場の理論に拡張することは，形式的には単純である――しかしこれ以降の節で，そのような場の理論における，数学的もしくは物理的に微妙な問題を見ることになる．我々は場に対して“Schrödinger表示”を用い，状態 $|\Psi\rangle$ が波動関数 $\Psi(\varphi)$ で表されるものとする．

$$\Psi(\varphi) = \langle\varphi|\Psi\rangle, \quad \hat{\varphi}(\mathbf{x})|\varphi\rangle = \varphi(\mathbf{x})|\varphi\rangle \tag{12.54}$$

---

†(訳註) Euclid時空において十分に長い時間 τ_{p} $(=2T)$ を設定したときの量子力学的確率分布と，有限温度 β^{-1} の下で統計力学的に生じる確率分布は，数学的に類似した構造を持ち，τ_{p} は温度の逆数 β に“対応する”ということである．但し統計力学では周期 (反周期) 境界条件が不可欠だが，量子力学系のEuclid時間 τ に関する境界条件の与え方に周期性の制約があるわけではない (このため“弾性弦”という特殊な捉え方が必要となる)．しかし便宜上，有限の τ_{p} の下で任意の周期境界条件を想定して $Z(\tau_{\mathrm{p}}) \equiv \int dx\,\mathcal{N}\int_{x'(-T)=x}^{x'(T)=x} d[x'(\tau)]e^{-\int d\tau\{m\dot{x}'^2/2+V(x')\}} = \int dx\langle x|e^{-\hat{H}\tau_{\mathrm{p}}}|x\rangle = \mathrm{Tr}\,e^{-\tau_{\mathrm{p}}\hat{H}}$ と置いてしまえば (状態和のトレース公式)，Z が粒子の分配関数そのものとなり，対応関係は更に明確になる．$\tau_{\mathrm{p}}\to\infty$ のときの非周期的な一般化式が (12.50)-(12.52) であると考えればよい．

$\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ を対角化する基底を用いると，演算子 $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ と，その正準共役な演算子 $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ は，次のように表される．

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}), \quad \hat{\pi}(\mathbf{x}) \to -i\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} \tag{12.55}$$

言い替えると $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ による演算は，関数 $\varphi(\mathbf{x})$ を掛けることに一致する．正準交換関係は次のようになる．

$$\big[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x})\big] = i\frac{\delta\varphi(\mathbf{x})}{\delta\varphi(\mathbf{x}')} = i\delta^{d-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{12.56}$$

この定式化を前節の結果に適用して，次の表式を得ることができる．

$$\langle 0|\, T\big\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\big\}|0\rangle = \frac{1}{Z}\int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} d[\varphi(x)]\big\{\varphi(x_n)\varphi(x_{n-1})\ldots\varphi(x_0)\big\}\, e^{-S[x]} \tag{12.57}$$

$$S[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x\Big\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + V(\varphi)\Big\} \tag{12.58}$$

$$Z = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} d[\varphi(x)]\, e^{-S[x]} \tag{12.59}$$

上記の式は，張力エネルギー $\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$，変位ポテンシャル $V\big(\varphi(x)\big)$ を持つ“ d 次元弾性膜 ”に関する古典統計力学の形をしている．

これらの式では，d 次元のうちのどれを“時間”とするかを指定していないことに注意してもらいたい．最終的な径路積分‡の式は，完全に回転不変なものである．この回転不変性は，Minkowski時空における Lorentz不変性に対応する．Lorentz不変性もしくは回転不変性が明白になっているところが，径路積分形式の大きな利点である．この性質は径路積分形式に含まれるラグランジアン密度が Lorentzスカラーであることに依っている．これに対して，たとえばハミルトニアン密度は，エネルギー－運動量テンソルの 00 成分である．

注意：量子力学の径路積分に現れた径路は，微分不可能であっても連続であったが，場の量の和は“ 典型的には ”更に滑らかさを欠く．この滑らかさの欠如が，摂動展開における積分の発散の原因になる．一般の n 次元において，この発散の問題を回避して $\delta\tau \to 0$ (連続極限) の操作を行うためには，何らかの処置が必要である．

‡(訳註) 場を扱う場合にまで“ 径路 (経路) ”積分という術語を充てるのは，不自然な感じがしないでもないが，この呼称が定着している (汎関数積分と言い替えている文献も稀にある)．

12.5 Gauss積分と自由場

12.5.1 実場

自由場の作用量は，場の変数 φ に関して 2 次である．2 次の作用を含む任意の積分は，基本的な Gauss 積分，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{12.60}$$

もしくは，これを変形した，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+ibx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a}} \tag{12.61}$$

に還元できる．後者の式は，

$$-\frac{1}{2}ax^2 + ibx = -\frac{1}{2}a(x-ib/a)^2 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a} \tag{12.62}$$

の関係を用い，式(12.60)の積分変数を x から $x-ib/a$ に変更することで得られる．

これらの積分を，多くの x_i を含む場合へ一般化するために，直交変換 $x_i \to y_i$ によって，対称行列 A_{ij} を対角化する．

$$\int \frac{d^N x}{\left(\sqrt{2\pi}\,\right)^N} e^{-\frac{1}{2}x^i A_{ij} x^j} = \int \frac{d^N y}{\left(\sqrt{2\pi}\,\right)^N} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} = \left(\prod_i \lambda_i\right)^{-\frac{1}{2}} = \det{}^{-\frac{1}{2}} A \tag{12.63}$$

λ_i は行列 A_{ij} の固有値である．同様にして次式を得る．

$$\int \frac{d^N x}{\left(\sqrt{2\pi}\,\right)^N} e^{-\frac{1}{2}x^i A_{ij} x^j + ib_i x^i} = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}b_i A^{-1}_{ij} b_j} \tag{12.64}$$

この一般化は代数的に見て明確である．しかし連続な x^i へ積分の一般化を行う際には，微妙な点が生じる．積分の中の指数は“2 次の形式”$A(x,x) = A_{ij}x^i x^j$ を含んでいる．すなわちこの指数は，対称な 2 階共変テンソル A_{ij} に依存する．右辺は行列 A の行列式を含む——行列が不変な行列式を持つために，この行列はベクトル空間 V に対して“自己準同型”(endomorphism) であると考えなければならない．すなわち写像として $A: V \to V$ である．任意の基底に関して，自己準同型の写像は，$(x')^i = A^i{}_j x^j$ のように作用する混合テンソル $A^i{}_j$ で表現される．両者を関係づけるために，内積 $\langle x, y\rangle = g_{ij}x^i y^j$ が必要である．次のように書く．

$$A(x,x) = x_i A_{ij} x_j = \langle x, Ax\rangle = x^i g_{ij} A^j{}_k x^k \tag{12.65}$$

積分は暗黙のうちに，この内積に依存することになる．何故なら式(12.63)と式(12.64)において測度を，

$$\frac{d^N x}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^N} \tag{12.66}$$

のように選ぶとき，我々は x^i を直交座標として扱っており，直交性の概念は内積の選択を必要とするからである．多くの場合，内積の選択の仕方は自明であるが，特別な文脈 (量子重力理論や超弦理論など) では，適切な内積を見いだすのが少々面倒になることもある．すべての場合において 2 次形式の対称性は，選択した内積に基づく演算子 A の自己共役性に反映される．

自由場の径路積分に現れる 2 次形式は，

$$A(\varphi, \varphi) = 2S[\varphi] = \int d^d x\, \varphi(x)(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) \tag{12.67}$$

なので $A \to -\partial^2 + m^2$ である．これを演算子として，通常のように，

$$-\partial^2 + m^2 \ :\ L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d) \tag{12.68}$$

と解釈するならば，$L^2(\mathbf{R}^d)$ における内積を暗黙のうちに，

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int d^d x\, \varphi_1(x)\varphi_2(x) \tag{12.69}$$

としていることになる．

式(12.63)と式(12.64)に現れる A^{-1} は，演算子 $-\partial^2 + m^2$ に関する Green関数である．

$$(-\partial^2 + m^2)^{-1}_{xy} = G(x, y) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2} \tag{12.70}$$

ここで $\det A$ という量は，この微分演算子の“Fredholm行列式”(Fredholm determinant) として理解しなければならない．この行列式は扱い難いところがある．何故なら演算子が $A = 1 + B$ (B はトレース族 trace-class) と書けない限り，行列式は発散し，正則化と繰り込みが必要になるからである．しばらくの間，これを発見的に次の恒等式(有限の行列では正しい) で定義しよう．

$$\ln \det A = \ln \prod_i \lambda_i = \sum_i \ln \lambda_i = \operatorname{tr} \ln A \tag{12.71}$$

我々は第 11 章において，既に恒等式，

$$\ln \det A = \operatorname{tr} \ln A \tag{12.72}$$

を見ている．今の例では，

$$\ln\det(-\partial^2+m^2)=(\mathrm{Vol})\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln(k^2+m^2) \tag{12.73}$$

となる．(Vol) は時空の体積を表す．Feynman-Kac公式と併せると，第6章で導いた基底エネルギーと同じ式が与えられる．

式(12.64)を書き直して，次式を得ることもできる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Z}\int d[\varphi(x)]\,e^{-\int d^dx\left\{\frac{1}{2}\varphi(x)(-\partial^2+m^2)\varphi(x)+iJ(x)\varphi(x)\right\}}\\&=\langle 0|\,T\left\{e^{i\int d^dx J(x)\varphi(x)}\right\}|0\rangle\\&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^dxd^dyJ(x)G(x,y)J(y)\right\}\end{aligned} \tag{12.74}$$

このように，ほとんど自明な帰結としてWickの定理を再現することができる．

12.5.2 複素場

ここまでは実場と実数を扱ってきたが，複素測度を導入して，上記の結果を複素場の場合へ拡張することにする．

$$dz^*dz=(dx-idy)(dx+idy)=2idxdy \tag{12.75}$$

(微分の表記を用いており dx と dy は反交換する.) したがって，

$$\frac{dz^*dz}{2i}=dxdy \tag{12.76}$$

である．基本となるGauss積分は次のようになる．

$$\int\frac{dz^*dz}{2\pi i}\,e^{-|z|^2}=\int\frac{dxdy}{\pi}\,e^{-(x^2+y^2)}=1 \tag{12.77}$$

これは実数 a に関して，次式が成り立つことを意味する．

$$\begin{aligned}\int\frac{dz^*dz}{2\pi i}\,e^{-a|z|^2+b^*z+z^*b}&=\int\frac{dz^*dz}{2\pi i}\,e^{-a(z-b/a)(z^*-b^*/a)+|b|^2/a}\\&=\frac{1}{a}\exp\left\{\frac{1}{a}\,|b|^2\right\}\end{aligned} \tag{12.78}$$

多重積分は次のようになる．

$$\int\prod_i\left[\frac{dz_i^*dz_i}{2\pi i}\right]e^{-z_i^*A_{ij}z_j+b_i^*z_i+z_i^*b_i}=(\det A)^{-1}\exp\left\{b_i^*A_{ij}^{-1}b_j\right\} \tag{12.79}$$

これを場に適用すると，次式が与えられる．

$$
\mathcal{N}\int d[\varphi^*]d[\varphi]\, e^{-\int d^dx \varphi^*(-\partial^2+m^2)\varphi+J^*(x)\varphi(x)+J(x)\varphi^*(x)}
$$
$$
= \left(\det(-\partial^2+m^2)\right)^{-1}\exp\left\{\int d^dx d^dy J^*(x)G(x,y)J(y)\right\} \tag{12.80}
$$

ここから，

$$
\langle 0|\, T\left\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(y)\right\}|0\rangle = G(x,y) \tag{12.81}
$$

や，既に演算子を用いて導いたその他の一連の式を，すべて再現できる．

12.6 摂動論

摂動展開を得るために，作用の中の相互作用項の指数関数を単純に展開し，各項を積分する．

分配関数を形式的に書き下すと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(J) &= \int d[\varphi]\, e^{-\int d^dx\left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2+\frac{m^2}{2}\varphi^2+V(\varphi)-J(x)\varphi(x)\right\}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int d[\varphi]\frac{1}{n!}\left[-\int d^dx V\left(\varphi(x)\right)\right]^n e^{-\int d^dx\left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2+\frac{m^2}{2}\varphi^2+J(x)\varphi(x)\right\}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]^n e^{\frac{1}{2}\int d^dx d^dy J(x)G(x,y)J(y)}
\end{aligned} \tag{12.82}
$$

これは本質的に，我々が既にDyson展開とWickの定理によって得ている摂動展開と同じものである．唯一の違いはEuclid時空を採用しているために，展開された各項がiを含まない簡単な形になっていることである．ここで念頭に置くべきことは，たとえば$V=\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$の場合に，各々の結節点に対して因子$-\lambda$が付くということだけである．

Euclid時空の径路積分を用いることによって，摂動級数が収束するかどうかという問題を扱うことができる．ごく単純なモデルとして，普通の積分で定義される，“ゼロ次元の場”の理論を考察しよう．

$$
\mathcal{Z}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2-\lambda x^4} \tag{12.83}
$$

指数の非線形項を展開して，各項を積分する．

$$
\mathcal{Z}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2-\lambda x^4}
$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} x^{4n} e^{-x^2}$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{1}{n!} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) \tag{12.84}$$

上式はどこか間違っている．誤りを示唆する点は，n に関する展開係数の増大である．$\Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)/n! \approx 4^n n!$ なので，摂動展開の収束半径はゼロである．式の導出を見直してみると，積分領域において λ のそれぞれの冪（べき）が一様に収束しているわけではないので，最後の式で行った和と積分の入れ替えは正しくない．

摂動級数が発散することを，より解りやすく理解することもできる．任意の関数を展開した冪級数の収束半径は，展開の基点から最も近い特異点までの距離で決まる．$\mathcal{Z}(\lambda)$ は，最も近い特異点が $\lambda = 0$ にある．$\mathcal{Z}(\lambda)$ は“半平面”$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ において特異点のない解析的な関数であるが，λ が負になると積分が発散するのは明らかである．$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ における $\mathcal{Z}(\lambda)$ を，解析接続によって定義することができるが，得られる関数は負の実軸上を走る分岐切断線を持つ．したがって原点は分岐点となり，原点のまわりの級数展開は収束し得ない．

これは場の理論において一般的な問題である．たとえば $\lambda\varphi^4$ 理論は $\lambda < 0$ において不安定な真空を持つ．このことは φ の場が $\varphi \approx 0$ から，φ が大きい負エネルギーを持つ領域へトンネルできるということからも，あるいは負の結合係数による φ 粒子間の引力によって，n^2 に依存する束縛エネルギーを持つ n 粒子束縛状態が生じるということからも理解できる．n が大きいと，n 粒子複合体の束縛エネルギーが，それを構成する全粒子の静止質量の総和を超える．そこで束縛を含まない真空状態が，束縛状態へと自壊してしまう．この真空の自壊は，基底状態のエネルギーが虚部を持つことを意味し，また $\lambda = 0$ において $\mathcal{Z}$ に分岐切断線が生じることをも意味する．同様のことは量子電磁力学において $e^2 < 0$ とおいた場合にも見られる．$e^2 < 0$ とすると，粒子間には引力が働き，斥力は働かない．このとき真空は不安定になり，電子対を形成した状態へと自壊する．この場合も $e^2 = 0$ において分岐切断線が生じる．

しかしながら，ここで示した式が全く役に立たないわけではない．Watsonの補題によって，式(12.84)の展開が，少なくとも $\mathcal{Z}(\lambda)$ の“漸近展開”(asymptotic expansion)であることは保証される．言い替えると，級数の項数を限定して $\lambda \to 0$ とするときに発生する誤差は，級数から省いた最初の項と同程度のもので，おそらくこれは小さい．場の理論における摂動展開も，大抵は漸近展開となっていることが期待されるが，通常はそれが確認されているわけではない．また，異なる関数が同じ漸近

展開を与える場合があるということも，念頭に置いておくべきであろう．すなわち摂動級数だけによって，場の理論を規定することはできないのである．

第 13 章　汎関数の方法

この章では，熱力学ポテンシャルに類似した，いくつかの有用な汎関数を導入する．それらを用いて自発的な対称性の破れとGoldstoneの定理を調べることにする．

13.1　生成汎関数

作用を，

$$S[\varphi] = \int d^d x \Big\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + V(\varphi) + J(x)\varphi(x) \Big\} \tag{13.1}$$

と置き，$\mathcal{Z}(J)$ と $W(J)$ を次のように定義する．

$$\mathcal{Z}(J) = e^{-W(J)} = \int d[\varphi]\, e^{-S[\varphi] - \int d^d x J(x)\varphi(x)} \tag{13.2}$$

これらの式に現れる“外源場”$J(x)$ は，Green関数を導き出すための，仮想的な“探針”(probe) の役割を果たすものと理解しなければならない[†]．$\langle 0|\, T\big\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\big\}|0\rangle$ を $\big\langle \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\big\rangle$ のように省略して書くことにする．場の期待値は，

$$\big\langle \hat{\varphi}(x) \big\rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta J(x)}\bigg|_{J=0} = \frac{\delta W}{\delta J(x)}\bigg|_{J=0} \tag{13.3}$$

と書かれ，また一般の n 点Green関数も，

$$\big\langle \hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n) \big\rangle = (-1)^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{13.4}$$

と書くことができる．

我々は $\mathcal{Z}(J)$ をGreen関数の“生成汎関数”(generating functional[‡]) と見なし，次のように書く．

$$\mathcal{Z}(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n \big\langle \hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n) \big\rangle J(x_1)\ldots J(x_n) \tag{13.5}$$

[†](訳註) $J(x)$ を単に“外場”と呼ぶ文献もあるが，$J(x)$ は φ-粒子を生成・消滅する役割を担うので，本稿では“外源場”と呼ぶことにする (原著では source)．式(13.1)を式(8.16)と比較すると，φ と J の関係は，電磁場ポテンシャル A^μ と電荷電流密度分布 j^μ の関係に比せられることが判る．

[‡](訳註) $\mathcal{Z}(J)$ をGreen関数の“母関数”(generating function) と呼ぶ文献もある．$W(J)$ についても同様である．

同様に，$W(J)$ は“連結Green関数”(connected Green function) の生成汎関数となる．これは第 4 章で示したように，W に対する摂動展開が，連結したダイヤグラムだけを含むことに依っている．

このことを，次のように確認できる．

$$-\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(x)} = \left\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right\rangle - \left\langle\hat{\varphi}(x)\right\rangle\left\langle\hat{\varphi}(y)\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right\rangle_{\text{con}} \tag{13.6}$$

同様に，

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(z)\right\rangle_{\text{con}} &= \left.\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)}\right|_{J=0} \\ &= \left\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(z)\right\rangle \\ &\quad - \left\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right\rangle_{\text{con}}\left\langle\hat{\varphi}(z)\right\rangle - \left\langle\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(z)\right\rangle_{\text{con}}\left\langle\hat{\varphi}(x)\right\rangle - \left\langle\hat{\varphi}(z)\hat{\varphi}(x)\right\rangle_{\text{con}}\left\langle\hat{\varphi}(y)\right\rangle \\ &\quad - \left\langle\hat{\varphi}(x)\right\rangle\left\langle\hat{\varphi}(y)\right\rangle\left\langle\hat{\varphi}(z)\right\rangle\end{aligned} \tag{13.7}$$

となる．マイナス符号の付いた各項が，元の相関関数から，連結していないグラフにあたる部分を取り除くことになる．

n 点連結関数は，

$$(-1)^{n+1}\frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1)\ldots J(x_n)} = \left\langle\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\right\rangle_{\text{con}} \tag{13.8}$$

と与えられる．ここで，

$$W(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int dx_1\ldots dx_n\left\langle\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}(x_n)\right\rangle_{\text{con}} J(x_1)\ldots J(x_n) \tag{13.9}$$

である．n 点連結関数は，統計力学における類似の量に因んで“キュムラント”(cumulant) と呼ばれることもある．

$W(J)$ のダイヤグラム展開に関する洞察を得るために，J を与えて φ を決定する純粋に古典的な問題を考えよう*．次の方程式を解かねばならないものとする．

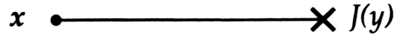
$$(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3(x) + J(x) = 0 \tag{13.10}$$

最低次において，単純に非線形項を無視して，

$$\varphi(x) = -\int G(x,y)J(y)d^d y + O(\lambda) \tag{13.11}$$

*(訳註) 外源場 $J(x)$ を設定するので，ここで考察するダイヤグラムの“外線”は，無限遠まで伸びるのではなく，J と結び付いた端点を持つ．

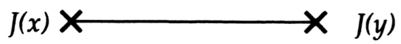
と書く．$G(x,y)=(-\partial^2+m^2)^{-1}_{xy}$ は，通常の伝播関数である．ダイヤグラムでは，



と表される．これは，

$$W(J)^{(0)}_{\text{classical}}=-\frac{1}{2}\int J(x)G(x,y)J(y)d^dxd^dy \tag{13.12}$$

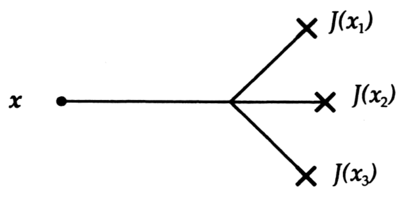
を，$J(x)$ に関して汎関数微分すると得られる．この式のダイヤグラムは，



と書かれる．×印は外源場 J の配置を表す．次の次数では，非線形項における φ の 1 次の値を考慮して，次式を得る．

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&-\int G(x,y)J(y)d^dy\\&+\frac{\lambda}{3!}\int d^dyd^dx_1d^dx_2d^dx_3G(x,y)G(y,x_1)G(y,x_2)G(y,x_3)+O(\lambda^2)\end{aligned} \tag{13.13}$$

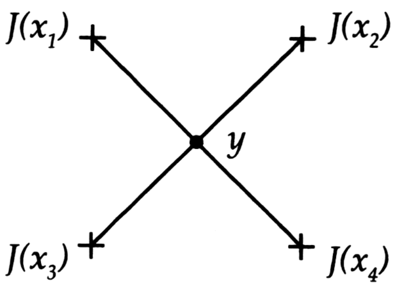
第 2 項をダイヤグラムで表すと，次のようになる．



これは，次の生成汎関数の微分から現れる．

$$\begin{aligned}W(J)^{(1)}_{\text{classical}}=\frac{\lambda}{4!}\int &d^dyd^dx_1d^dx_2d^dx_3d^dx_4J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4)\\&\times G(y,x_1)G(y,x_2)G(y,x_3)G(y,x_4)\end{aligned} \tag{13.14}$$

この汎関数をダイヤグラムで表すと，次のようになる．



このような作業を続けると，$W(J)_{\mathrm{classical}}$ が，それぞれの枝の端に $J(x)$ の因子を持つ，すべての“木のダイヤグラム”(tree diagram) の和として与えられることが分かる．これらと同じ一連の“木のダイヤグラム”は，量子力学において $W(J)$ を展開した項の中にも現れるものであるが，量子力学的な摂動展開では，この他に閉じたループを持つ一連のダイヤグラムも含まれる．閉じたループは古典力学には見られない，量子力学に特有の補正を表しているのである†.

13.1.1　有効作用

熱力学と同様に，Legendre変換によって $\langle\hat{\varphi}(x)\rangle$ と $J(x)$ の役割を入れ替えると都合のよい場合が少なくない．新たな汎関数を次のように定義する．

$$\Gamma(\varphi_c) = W(J) - \int d^d x\, J(x)\varphi_c(x) \tag{13.15}$$

$\varphi_c = \langle\hat{\varphi}\rangle$ である‡．ハミルトニアン $H = p\dot{q} - L$ が，$\dot{q}$ ではなく p の関数と見なされるのと同様に，$\Gamma(\varphi_c)$ は φ_c の関数と見なされる．

外源場 $J(x)$ は，$\Gamma(\varphi_c)$ から次のように求めることができる．

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_c(y)} &= \frac{\delta W}{\delta\varphi_c(y)} - \int d^d x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)}\varphi_c(x) - \int d^d x \frac{\delta\varphi_c(x)}{\delta\varphi_c(y)} J(x) \\ &= \int d^d x \frac{\delta W}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)} - \int d^d x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)}\varphi_c(x) - J(y) \\ &= -J(y)\end{aligned} \tag{13.16}$$

†(訳註) つまり“木のダイヤグラム”とは，ループを含まない (すなわち量子補正を含まない) ダイヤグラムの総称である．

‡(訳註) φ_c の値は，現実の物理系で実現される $\langle\varphi\rangle$ の値に固定されているわけではなく，任意の値を設定できる．この任意性は，未定の仮想外源場 J を導入したことによって生じている．

上の最後の式を導くところで，次の関係を用いた．

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle\hat{\varphi}(x)\rangle = \varphi_{\mathrm{c}} \tag{13.17}$$

$\Gamma(\varphi_{\mathrm{c}})$ は“有効作用”(effective action) と呼ばれる．有効作用は次式を通じて $\varphi_{\mathrm{c}}(x)$ を決定する．

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi_{\mathrm{c}})}{\delta\varphi_{\mathrm{c}}(x)} + J(x) = 0 \tag{13.18}$$

量子論における $\Gamma(\varphi_{\mathrm{c}})$ の役割は，古典論において作用 S が，次式を通じて古典的な場の量 $\varphi(x)$ を決定するのと全く同じである．

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + J(x) = 0 \tag{13.19}$$

有効ポテンシャル

我々は既に J が定数のときに，$W(J)$ が物理的に (Vol)(Time)$\mathcal{E}_0(J)$ という意味を持つことを知っている．$\mathcal{E}_0(J)$ は外源場 J を伴う系の基底エネルギー密度である．φ_{c} が定数ならば，$\Gamma(\varphi_{\mathrm{c}})$ も同様にエネルギー密度と解釈できる．このことを見るために，

$$\mathcal{V}(\varphi_{\mathrm{c}}) = \frac{1}{(\mathrm{Vol})}\inf\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle \tag{13.20}$$

と置いてみよう．下限 (infimum) は次の条件下で，規格化されたすべての状態 $|\Psi\rangle$ を対象として決める．

$$\frac{1}{(\mathrm{Vol})}\int d^3x\langle\Psi|\hat{\varphi}|\Psi\rangle = \varphi_{\mathrm{c}} \tag{13.21}$$

Lagrangeの未定係数 E や J を導入して制約を課することにより，これらの条件下で $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle$ を最小にする状態 $|\Psi\rangle$ の方程式を見いだすことができる．$|\Psi\rangle$ の変化に対する定常性の要請により，次式を得る．

$$\left(\hat{H} + J\int d^3x\,\hat{\varphi} - E\right)|\Psi\rangle = 0 \tag{13.22}$$

したがって $|\Psi\rangle$ として，$\hat{H} + J\int d^3x\,\hat{\varphi}$ の固有状態で，その固有値が最低エネルギー $E = E_0(J)$ に一致するものを選ぶことで，最小条件が達成される．J の値は式(13.21) を満足するように決めなければならない．Lagrangeの未定係数 J が位置に依存しない定数なので，このときの φ_{c} も位置に依らない定数になると予想される．もしこれが定数でなければ，自発的な並進対称性の破れとなる．このような状況を除外すれば，次のように書ける．

$$\mathcal{V}(\varphi_{\mathrm{c}}) = \mathcal{E}_0(J) - J\varphi_{\mathrm{c}} \tag{13.23}$$

W と $\mathcal{E}_0$ の関係を与えると，これは次式を意味する．

$$(\mathrm{Vol})(\mathrm{Time})\mathcal{V}(\varphi_{\mathrm{c}}) = \Gamma(\varphi_{\mathrm{c}}) \tag{13.24}$$

関数 $\mathcal{V}(\varphi_{\mathrm{c}})$ は“有効ポテンシャル”(effective potential) と呼ばれる．ここで，

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi_{\mathrm{c}}} + J = 0 \tag{13.25}$$

なので，$\mathcal{V}(\varphi_{\mathrm{c}})$ の停留点が，外源場 J をゼロと置いたときの $\langle\hat{\varphi}\rangle$ の可能な値を与える．

自発的な対称性の破れ

第10章で述べたように，基底状態 (真空) が，系を特徴づける何らかの対称操作の下で不変でない場合，対称性が自発的に破れていると言う．大抵，自発的な対称性の破れは，対称操作の下で自明でない変換をする，ゼロでない場の真空期待値の発生を伴う．たとえば $\varphi \to -\varphi$ の離散変換の下で不変な古典的ポテンシャルや，$|\varphi|$ だけの関数であるポテンシャルの下で，ゼロでない $\langle\hat{\varphi}\rangle$ が発生しているならば，それは対称性の破れを表す．

自発的な対称性の破れは，ポテンシャルが最小となる点が原点から離れて存在するときには，古典的な扱いにおいて既に生じるものである．反転操作 $\varphi \to -\varphi$ に関して対称な双井戸型ポテンシャルや，回転不変な“メキシコ帽子型ポテンシャル”などが，対称性の破れを誘発する代表的なポテンシャルの例である．量子論による補正を考慮すると，基底状態の $\langle\hat{\varphi}\rangle$ の値が変更され，古典的には破れるはずの対称性が回復する可能性もある[1)]．

有効ポテンシャルにおいて，これらの効果を調べる際には，少々注意が必要である．次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} &= -\langle\hat{\varphi}^2 - \varphi_{\mathrm{c}}^2\rangle \\ &= -\big\langle(\hat{\varphi} - \varphi_{\mathrm{c}})^2\big\rangle\end{aligned} \tag{13.26}$$

$\big\langle(\hat{\varphi} - \varphi_{\mathrm{c}})^2\big\rangle$ を径路積分で評価する場合，被積分関数は厳密に正になる．実際 e^{-S} は，$(\varphi - \varphi_{\mathrm{c}})^2$ と同様に正である．したがって，式(13.26)の最後の式は負であるこ

[1)] 単純な量子力学系では，基底状態が非縮退であり，常にこの効果が生じている．この事情を理解するために，ある円軌道上を自由に動く質量 M の粒子を考えてみよう．固有関数は $\langle\theta|m\rangle = e^{im\theta}$ で，これに対応するエネルギー固有値は $E_m = m^2/2M$ である．粒子がある特定の角度の位置に止まった状態 $|\theta\rangle = \sum e^{-im\theta}|m\rangle$ は，$M \to \infty$ の極限以外では固有状態になり得ない．同様に双井戸型ポテンシャルにおいては，トンネル過程によって対称性が回復する．

とが保証される．

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} < 0 \tag{13.27}$$

これは，$\mathcal{E}_0$ を J に対して描くと，曲線はどこでも常に“凹”(concave) になることを意味する．ここで，

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial J^2} = \frac{\partial \varphi_c}{\partial J} < 0 \tag{13.28}$$

なので，次式を得る．

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \varphi_c^2} \equiv -\frac{\partial J}{\partial \varphi_c} > 0 \tag{13.29}$$

すなわち，φ_c に対する $\mathcal{V}(\varphi_c)$ の曲線は，どこでも下向きに“凸”(convex) である．Γ の摂動展開の各項においては，しばしばこの凸性が損なわれるが，$\mathcal{V}(\varphi_c)$ の展開全体は必ず凸性を持たねばならない．

したがって全有効ポテンシャルは，決して双井戸構造を持たない．この理由を理解することは難しいことではない．この場合，もし $\langle\hat{\varphi}\rangle = \varphi_c$ の真空状態 $|\varphi_c\rangle$ が存在するならば，同じエネルギーを持つ $\langle\hat{\varphi}\rangle = -\varphi_c$ の状態 $|-\varphi_c\rangle$ も存在しなければならない．そうすると次の状態，

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha}\,|\varphi_c\rangle + \sqrt{1-\alpha}\,|-\varphi_c\rangle \tag{13.30}$$

も，期待値 $\langle\alpha|\varphi|\alpha\rangle = (2\alpha-1)\varphi_c$ を持つ真空状態となり得る ($0 \le \alpha \le 1$ とする)．ここでは，両端 $\pm\varphi_c$ の間の任意の値が真空期待値となる．古典論のレベルでも，双井戸ポテンシャルから“真の”有効ポテンシャルを作るには，2 つの最小点を水平線で結んでポテンシャル曲線の“凸包”(convex hull) をつくり，2 つの井戸の間の障壁を除かなければならない†．$\mathcal{E}_0(J)$ を Helmholtzの自由エネルギー密度，有効ポテンシャルを Gibbsの自由エネルギー密度のように考えると，これは統計力学で言う“Maxwell混合相生成”(Maxwell construction for mixed phases) に相当する．この言葉遣いに従えば，両端の状態の中間にある熱力学的状態は“混合相”(たとえば氷と水の混合状態) であり，両端の状態は“純粋相”(pure phase：氷だけ，もしくは水だけの状態) にあたる．純粋相だけがクラスター分解性を持つ．

$\Gamma(\varphi_c)$ のダイヤグラム展開

Γ を φ_c の冪(べき)に展開する．

$$\Gamma(\varphi_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)\varphi_c(x_1)\ldots\varphi_c(x_n) \tag{13.31}$$

†(訳註)“凸包”の外形は，内側に窪んでさえいなければ，平坦部分があってもよい．式(13.27)-(13.29)の不等式も，正確には等号条件まで含めるべきである．

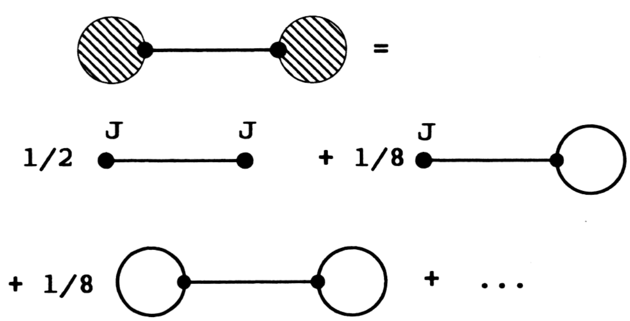
このときの係数 $\Gamma^{(n)}$ は，“1 粒子既約グラフ”(one-particle irreducible graph：1PI graph) によって与えられる．これは単一の線を切断することによって，2 つの部分に分離することができないダイヤグラムで，外線の伝播関数も省かれている†.

$\Gamma(\varphi_c)$ や $V(\varphi_c)$ の摂動展開は，$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \eta(x)$ と置き，外源場 $J(x)$ を $\langle\hat{\eta}(x)\rangle = 0$ となるように調節することによって導かれる‡．簡単のため $V(\varphi_c)$ の展開を議論しよう．φ_c は定数なので，シフト分 η は，作用の中の多項式の部分だけに影響する．

$$\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi \;\to\; \frac{1}{2}\varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_c^4 + J\varphi_c + \eta\left(J + m^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi_c^3\right) + \frac{1}{2}\eta^2\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2\right) + \frac{\lambda}{3!}\eta^3\varphi_c + \frac{\lambda}{4!}\eta^4 \tag{13.32}$$

このようにシフトした理論は，φ_c に依存する質量項と，元々ある 2 次の相互作用の他に，η^3 の結節点を含む．

シフトした理論において $W(J)$ に寄与するダイヤグラムを，次のような一連の図によって表すことができる．



ここでは，グラフのその部分を切断すると，グラフを 2 つに分離することができるような伝播関数をすべて明示し，それ以外の伝播関数は“かたまり”のなかでまとめて扱っている．

外源場 $J(x)$ は，かたまりを終わらせる線だけに発生し，これは $J(x) + \Gamma_1(x)$ の形になる．$\Gamma_1(x)$ は，印を付けた点に関するすべての 1 粒子既約グラフの和である．我々が J を $0 = J(x) + \Gamma_1(x)$ となるように選べば，1 粒子既約グラフはすべて消滅

†(訳註) $\Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ は“1 粒子既約な結節点関数”と呼ばれる．有効作用 $\Gamma(\varphi_c)$ は $\Gamma^{(n)}$ の生成汎関数である．

‡(訳註) $\varphi_c = \langle\varphi\rangle$ を“任意に”与えるので，それを実現させるように (すなわち $\langle\eta\rangle \to 0$ となるように)，仮想外源場 J を導入しなければならない．p.182訳註参照.

する．少し考えると，このように J を選択することが，正確に $\langle\eta\rangle=0$ とするために必要な条件になることが分かる．こうして次式を得る．

$$\Gamma(\varphi_c) \ = S[\varphi_c] + \frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right) + \text{sum of 1PI graphs} \tag{13.33}$$

第1項は，径路積分の中に現れる古典的な作用であるが，第2項は，シフトした作用の Ouroboros グラフ (1ループグラフ) である．作用を，

$$S[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x \left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right\} \tag{13.34}$$

と置き，φ_c を時間と空間に依存しないように選ぶと，Ouroboros グラフは $\mathcal{V}(\varphi_c)$ に対して，

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d^d k}{(2\pi)^d}\ln\left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2\right) \tag{13.35}$$

の寄与をする．既に知っているように，これは“質量の自乗”が $m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2$ と表される理論における，場の各モードのゼロ点振動 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の総和と等しいものである．

これらのグラフの中の伝播関数は，

$$-\partial^2 + m^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi_c^2 \tag{13.36}$$

の逆演算子なので，すべての伝播関数の分母に λ が現れる．したがってダイヤグラムを更にダイヤグラムで展開していっても，λ の冪展開にならない．ここでは，グラフに現れるループの数によって展開を整理するのが最良の方法である．この作業は $\hbar$ の冪展開と等価である．$\hbar$ を明示すると $L \to \hbar^{-1}L$ なので，各々の伝播関数は $\hbar$ に比例し，各々の結節点は因子 $\hbar^{-1}$ を持つ．したがって V 個の結節点と P 本の伝播関数を持つダイヤグラムは $\hbar^{P-V}$ に比例する．ダイヤグラムに現れるループの数は $P-V-1$ であり，また $\hbar$ を明示すると $W(J) = (\mathrm{Vol})(\mathrm{Time})\,\mathcal{E}_0/\hbar$ である．以上のことを考慮すると，$\mathcal{V}(\varphi_c)$ に対する $S[\varphi_c]$ の寄与の次数は $O(\hbar^0)$ であり，Ouroboros グラフの寄与は $O(\hbar)$ であることが判る．$\hbar$ を小さな量と考えてはいけない——これは無次元の量で，我々が用いる単位系では1に等しい．しかし，このループ展開は，場のシフトや，ラグランジアンにおける自由項と相互作用項の割り当ての変更には影響されない*．

1ループまでの精度で，

$$\mathcal{V}(\varphi_c) = V(\varphi_c) + \frac{1}{2}\int\frac{d^d k}{(2\pi)^d}\ln\left(k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2\right) \tag{13.37}$$

*(訳註) 対象とする作用量に対して $\hbar$ が十分小さければ，$\hbar$ の低次項だけを残す近似は実際に有効になる．$\hbar$ に関する展開を行って高次項を省く手法は，WKB法 (Wentzel-Kramers-Brillouin の準古典近似) と呼ばれる．

となる．この式は凸ではない．凸性の問題に関する唯一のヒントは，φ_c が有効質量の自乗 $m^2 + \dfrac{\lambda}{2}\varphi_c^2$ を負にするような値の時に，1ループ項が虚部を持つことである．非摂動的な真空の効果を考慮した注意深い計算によると，凸性の不等条件を破るすべての φ_c の値の下で，虚部は指数関数的に小さくなる．

13.2　Ward恒等式

作用量が次のように表される複素場において，Noetherの定理を思い起こしてみよう．

$$S = \int d^d x \left\{ \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + m^2 |\varphi|^2 + V(|\varphi|^2) \right\} \tag{13.38}$$

x に依存しない定数 α を用いた変換，

$$\varphi \ \to \ e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^* \ \to \ e^{-i\alpha}\varphi^* \tag{13.39}$$

の下で S は不変である．α を x の関数にすると，

$$\delta S = \int d^d x\, \partial_\mu \alpha(x) \left\{ \frac{1}{i} \left[\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^* \right] \right\} \tag{13.40}$$

となる．これは次式を意味する．

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha(x)} = -\partial_\mu \left\{ \frac{1}{i} \left[\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^* \right] \right\} = -\partial_\mu j_\mu = 0 \tag{13.41}$$

最後の等式は，場が古典的な運動方程式を満たすときに，“任意の”変換——特例として (13.39) の変換を含む——に関して δS がゼロであることに依っている．ここからは，径路積分される場が一般に運動方程式を“満たさない”ものと考えてみるが，上記と同様に x に依存する“回転”の変換は有用な結果を導く．

次の径路積分を考える．

$$I = \int d[\varphi^*] d[\varphi] \left\{ \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \varphi^*(y_1) \ldots \varphi^*(y_m) \right\} e^{-S[\varphi, \varphi^*]} \tag{13.42}$$

式(13.39)を変数変換と見なす．この変換の下で積分値は変わらない．測度 $d[\varphi^*]d[\varphi]$ も変換 (13.39) の下で不変であることに留意されたい——α が x に依存する場合 (局所的変換) でも不変である．これらのことを念頭において，次の変換を見てみる．

$$\varphi(x) \ \to \ \varphi(x)\big(1 + i\delta\alpha(x)\big), \quad \varphi^*(x) \ \to \ \varphi^*(x)\big(1 - i\delta\alpha(x)\big) \tag{13.43}$$

この変換の下では，任意の $\delta\alpha(x)$ に関して，次のようになる．

$$\begin{aligned}0 = \delta I &= \int d[\varphi^*]d[\varphi]\Big(\delta\big\{\varphi(x_1)\ldots\varphi^*(y_m)\big\}e^{-S} + \big\{\varphi(x_1)\ldots\varphi^*(y_m)\big\}\delta e^{-S}\Big)\\ &= \int d[\varphi^*]d[\varphi]\Big(\sum_{i=1}^{n}\int i\delta\alpha(x)\delta(x-x_i)\big\{\varphi(x_1)\ldots\varphi^*(y_m)\big\}dx\\ &\qquad -\sum_{i=1}^{m}\int i\delta\alpha(x)\delta(x-y_i)\big\{\varphi(x_1)\ldots\varphi^*(y_m)\big\}dx\Big)e^{-S}\\ &\quad + \int d[\varphi^*]d[\varphi]\Big\{\varphi(x_1)\ldots\varphi^*(y_m)\int dx\,\delta\alpha(x)\partial_\mu j_\mu(x)\Big\}\,e^{-S}\end{aligned} \tag{13.44}$$

したがって，$\delta\alpha(x)$ の係数部分がゼロでなければならない．

これで，次式を証明したことになる．

$$\begin{aligned}&i\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i)\langle 0|T\big\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle - i\sum_{i=1}^{m}\delta(x-y_i)\langle 0|T\big\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle\\ &\quad = -\partial_\mu\langle 0|\,T\big\{\hat\jmath_\mu(x)\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle\end{aligned} \tag{13.45}$$

この式は，第 8 章で交換子を使って導出したWard恒等式と似ている．我々は任意の連続対称性に関して，類似の恒等式をつくることができる．

∂_μ が時間順序化の“外”にあることに注意されたい．径路積分を，時間順序化した演算子積の真空期待値に関係づける定理は，$\hat\varphi$ の多項式だけに適用できるもので，φ と正準共役な場 $\pi(x)$ を含む演算子積に用いることはできない．そこで，次のように書かなければならない．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{Z}}\int d[\varphi]\Big\{\big(\partial_{x_0}\varphi(x)\big)\varphi(y)\Big\}\,e^{-S} &= \frac{1}{\mathcal{Z}}\partial_{x_0}\!\int d[\varphi]\big\{\varphi(x)\varphi(y)\big\}\,e^{-S}\\ &= \partial_{x_0}\langle 0|\,T\big\{\hat\varphi(x)\hat\varphi(y)\big\}|0\rangle\end{aligned} \tag{13.46}$$

Ward恒等式は，次のように略記される．

$$\partial_\mu\langle 0|\,T\big\{\hat\jmath_\mu(x)\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle = -\delta\langle 0|\,T\big\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle \tag{13.47}$$

13.2.1 Goldstoneの定理

式(13.45)を，すべての x_i，y_i を含む領域 Ω の境界で積分して，次式を得る．

$$\int_{\partial\Omega} dS^\mu\langle 0|\,T\big\{\hat\jmath_\mu(x)\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle = (n-m)\langle 0|\,T\big\{\hat\varphi(x_1)\ldots\hat\varphi^\dagger(y_m)\big\}|0\rangle \tag{13.48}$$

dS^μ は，領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ で外向きの法線を持つ表面要素であり，n および m は $\hat{\varphi}(x)$ および $\hat{\varphi}^\dagger(y)$ の数である．境界項を無視できるような条件下では (たとえば時空が“球”であったり，境界が無限遠にあり，すべての粒子が質量を持つ場合)，$n = m$ でなければ $\langle 0|T\{\hat{\varphi}(x_1)\ldots\hat{\varphi}^\dagger(y_m)\}|0\rangle = 0$ である．

Ward恒等式を成立させる連続対称性が自発的に破れて $\langle 0|\hat{\varphi}|0\rangle \neq 0$ となる場合には，境界項を無視できないような状況が生じる．このとき $n \neq m$ でも，式(13.48)の右辺の真空期待値はゼロにならない．したがって左辺の積分の境界が遠方にあっても，境界項からの寄与を考慮しなければならない．自発的な連続対称性の破れが，質量ゼロの粒子——Goldstoneボゾン†(Goldstone boson)——を生成することにより，境界からの寄与が可能になる．Goldstoneボゾンの生成に伴い，系は境界条件に対して敏感になる．

時空領域が大きくても有限で，境界を持たない場合には (球やトーラス形状など)，Ward恒等式に従って $\langle\hat{\varphi}\rangle$ がゼロにならなければならない．これは径路積分によって与えられる結果に一致している．何故なら，時空における場のあらゆる形に関する和は，すべての可能な対称性の破れの方向に関する和を含むことになり，φ はゼロへ平均化されるからである．時間方向の周期境界条件の下で和をとることは，ハミルトニアンの流儀で言えば，Hilbert空間において総ての状態のトレースをとることを意味し，やはり $\langle\hat{\varphi}\rangle$ は平均化によってゼロになる．しかし対称性が破れることもあり得る．我々は単純にクラスター分解性を持たないGreen関数を計算しているが，対称性をあらわに破る摂動項を導入すると，自発的な対称性の破れを検出できる．このときには，体積を無限大にする操作と，対称性を破る摂動項を除去する操作の順序を入れ替えることが不可能になる．

ひとつの具体例を考察してみよう．複素場 φ を，実部と虚部へ $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ のように分解し，Ward恒等式を，

$$\langle\hat{\varphi}_a(y)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int d[\varphi_1]d[\varphi_2]\varphi_a(y)e^{-S[\varphi_1,\varphi_2]} \tag{13.49}$$

に適用する．S を次式のように置く．

$$S[\varphi_1,\varphi_2] = \int d^dx\left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2-\kappa)^2 - \epsilon\varphi_1\right\} \tag{13.50}$$

†(訳註) Goldstoneボゾンを，南部－Goldstoneボゾン (NGボゾン) と呼ぶこともある．自発的な対称性の破れに伴って，質量ゼロのBose粒子が発生し得ることは，カイラル対称性を自発的に破る南部－Jona-Lasinio模型によって初めて認識された (1961年．この場合NGボゾンは，ハドロンとしては質量が小さい π 中間子に相当する．17.4節も参照)．J. Goldstoneは同年，Goldstone模型 (φ^4 型相互作用を持つ複素スカラー場) を用いて，より分かりやすいNGボゾンの例を提示し，その翌年，一般的に“Goldstoneの定理”の証明を与えた．

我々が採用したポテンシャルは“メキシコ帽子型ポテンシャル”であり，$\epsilon = 0$ のとき $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \kappa$ の円上の任意の点が，縮退した古典的な最小値になる．有限の $-\epsilon\varphi_1$ の項は回転対称性をあらわに破り，$\varphi_1 = \kappa$，$\varphi_2 = 0$ 付近の点を唯一の最小値にする．量子ゆらぎは $\langle\hat{\varphi}_1\rangle$ の値を修正するが，$\langle\hat{\varphi}_2\rangle = 0$ は変わらない．古典的には $\epsilon \to 0$ の極限において，場がポテンシャルの底の円に沿った接線方向に振動するギャップのないモードが存在する．もしこのモードが量子化の後もギャップを持たなければ，このモードに対応する粒子は，質量を持たないGoldstoneボゾンとなる．他方，放射方向のモードは，質量を持ったままである[2)]．我々はWard恒等式を用いて，対称性の破れが，常にGoldstoneボゾンの生成を伴うことを示す．

次の回転，

$$\delta\varphi_1(x) = -\alpha(x)\varphi_2(y), \quad \delta\varphi_2(x) = \alpha(x)\varphi_1(y) \tag{13.51}$$

の下で，δS は次のように与えられる．

$$\delta S = \int d^d x \left\{\partial_\mu\alpha(\varphi_1\partial_\mu\varphi_2 - \varphi_2\partial_\mu\varphi_1) + \alpha\epsilon\varphi_2\right\} \tag{13.52}$$

したがって，運動方程式は，

$$\partial_\mu(\varphi_1\partial_\mu\varphi_2 - \varphi_2\partial_\mu\varphi_1) = \epsilon\varphi_2 \tag{13.53}$$

となる．$\epsilon = 0$ の場合，次式で表されるカレントは保存する．

$$j_\mu(x) = \big(\varphi_1(x)\partial_\mu\varphi_2(x) - \varphi_2(x)\partial_\mu\varphi_1(x)\big) \tag{13.54}$$

$\langle\varphi_2\rangle$ を表す径路積分に変分を導入すると，次のWard恒等式を得る．

$$\int d^d x\, \alpha(x)\Big\{\delta^d(x-y)\langle\hat{\varphi}_1\rangle + \partial_\mu\big\langle\hat{\jmath}_\mu(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle - \epsilon\big\langle\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle\Big\} = 0 \tag{13.55}$$

ここから即座に，いくつかの結果が与えられる．

$\epsilon \neq 0$ とするならば，すべての粒子は質量を持ち，$\alpha = 1$ と置いたときに境界項を無視することができる．そうすると $\langle\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2\rangle$ の，運動量がゼロのFourier成分は，次のようになる．

$$\langle\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2\rangle_{p=0} = \frac{1}{\epsilon}\,\langle\hat{\varphi}_1\rangle \tag{13.56}$$

上式は対称性の破れの有無によらず成立する．対称性が破れていると，$\epsilon \to 0$ のときに左辺が特異性を持つ．

---

2) ここで考察している相対論的に不変な系と，第 10 章で扱った非相対論的なBose粒子系との違いに注意せよ．後者においては放射方向のモードと接線方向のモードを明確に区別することができない．

この特異性を理解するために，$\hat{\varphi}_1$ を真空期待値 $\langle\hat{\varphi}_1\rangle$ に置き換える近似をしてみよう．そうすると，

$$\delta^d(x-y)\langle\hat{\varphi}_1\rangle + \langle\hat{\varphi}_1\rangle\partial_x^2\big\langle\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle - \epsilon\big\langle\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle = 0 \tag{13.57}$$

となる．言い替えると $\langle\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_2(y)\rangle$ は，$m^2 = \dfrac{1}{\epsilon}\langle\hat{\varphi}_1\rangle$ の自由な Klein-Gordon 方程式を満たし，

$$\langle\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2\rangle_p = \frac{1}{p^2 + \dfrac{\epsilon}{\langle\hat{\varphi}_1\rangle}} \tag{13.58}$$

となる．$\epsilon \to 0$ とすると，場 $\hat{\varphi}_2$ によって生成される粒子の質量が，ゼロになることが見てとれる．これが Goldstone ボソンである．

Jeffrey Goldstone は，$\hat{\varphi}_1$ を期待値に置き換える近似には依らず，一般に Goldstone ボソンが存在することを論じた．彼は $\epsilon = 0$ のときの，カレントが保存する場合の 2 点関数 $\big\langle \hat{\jmath}_\mu(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle$ を考察した．$\hat{\jmath}_\mu(x)$ が真空を，運動量 p を持つ状態に結合させるものとしよう．Lorentz 不変性により，

$$\langle p|\,\hat{\jmath}_\mu(x)|0\rangle = Np_\mu e^{ipx} \tag{13.59}$$

となる．状態が質量を持てば $(p^2 \neq 0)$，演算子の方程式 $\partial_\mu\hat{\jmath}_\mu(x) = 0$ のため，$N = 0$ でなければならない．しかし状態が質量を持たないならば $(p^2 = 0)$，N がゼロでなくともよい．$\langle\hat{\varphi}_1\rangle \neq 0$ のとき，そのような結合の存在が“必要になる”ことを見てみよう．$\big\langle \hat{\jmath}_\mu(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle$ を Lehmann 展開する．

$$\big\langle \hat{\jmath}_\mu(x)\hat{\varphi}_2(y)\big\rangle_p = \int dm^2\rho_2(m^2)\frac{p_\mu}{p^2+m^2} \tag{13.60}$$

これを，式(13.55) に代入すると，次式が得られる．

$$\langle\hat{\varphi}_1\rangle = \int dm^2\rho_2(m^2)\frac{p^2}{p^2+m^2} \tag{13.61}$$

この式の左辺は p に依存しない．$\rho_2(m^2) = \langle\hat{\varphi}_1\rangle\delta(m^2)$ と置くことが，右辺も p に依らないようにする唯一の方法である．したがってスペクトル関数は，質量がゼロの状態——Goldstone ボソン——だけの寄与を含む．

この議論が成立しなくなる状況もあり得る．広範囲に及ぶゲージ場が存在すると，$p \to 0$ の極限は特異なものになる．我々はこのような例を，少なくともひとつ知っている．それは電子気体におけるプラズモンのモードである．第 9 章で見たように，このモードは長距離の Coulomb 相互作用によって，“音波”(自発的に破れた並進対称性に付随する Goldstone モード) がプラズマ振動数へ“押し上げられた”もので

ある[†]．このモードの分散曲線は，すべての $\mathbf{p} \neq 0$ に対して $\omega^2(\mathbf{p}) = c^2_{\text{sound}}\mathbf{p}^2 + \omega^2_p$ という形になる．しかし運動量が“正確に”ゼロのモードは，系全体の並進に還元される．そのような並進は，修復力を生じることがなく，振動数はゼロとなる．同様に，相対論的な系においても，Higgs-Kibble機構によって，Goldstoneボゾンと，質量のない横方向のゲージ場が結合して，質量を持ったベクトルゲージ場が現れる[‡]．超伝導体におけるMeissner効果にも本質的に，この現象と共通する機構が含まれている．

[†](訳註) 結晶系の音波は並進対称性の破れに伴うGoldstoneボゾンと見ることも可能であるが，電子気体は自発的に並進対称性を破っているわけではないので，ここで言及されている電子気体中の“音波”(Coulomb力を仮想的に除いた密度波)をGoldstoneボゾンと見るのは，本当は適切ではない．しかし電子系の“音波”とCoulomb場の結合，および一般のGoldstoneボゾンとゲージ場の結合は，両者とも，もともと質量を持たない素励起と長距離力の結合であるという意味で，類似の現象と見ることも可能である．

[‡](訳註) 結局Goldstoneボゾンは現れず，代わりにゲージ場が質量を持つことになる．A. Salamの言い方に倣えば「質量ゼロのゲージ場がGoldstoneボゾンを“食べて”質量を獲得する」のである．本書にはゲージ原理の解説(基本粒子場の力学に対する局所ゲージ対称性の要請から，相互作用を媒介するゲージ場の存在と，その相互作用の形が規定される)が含まれていないが，ゲージ原理から直接現れるゲージボゾンは，本来は質量がゼロでなければならない．弱い相互作用を媒介するウィークボゾンも，元々は質量のないゲージボゾンであるが，自発的に対称性を破った未知の“Higgs場”におけるGoldstoneボゾンを吸収して質量を獲得しているものと考えられている．弱い相互作用は，このHiggs-Kibble機構によって短距離力になっているのである．

第 14 章　Fermi粒子系の径路積分

Fermi粒子場の径路積分表示を得るためには，反交換する c-数の場を積分する必要がある．そのような場に対して定義される“積分”は形式的なものであるが，Berezinによって導入された積分表記は，驚くほど実り多い結果をもたらす．

14.1　Berezin積分

まず“Grassmann数”(Grassmann variable)——厳密には“数”ではないが——と呼ばれる，反交換する代数記号の組を導入する．N 個のGrassmann数を ξ_i で表すことにする．必要とされる仮定は，それらが線形独立で，かつ，

$$\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0 \tag{14.1}$$

という条件を満たすということだけである．ξ_i を係数体 (**R** もしくは **C**) と結合させて，ξ_i の積のすべての和から成る代数 (もしくは多元環) $\mathcal{A}$ を形成する．この代数の典型的な要素 (元) は，

$$A = a + a_i\xi_i + \frac{1}{2}a_{ij}\xi_i\xi_j + \frac{1}{3!}a_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k + \ldots \tag{14.2}$$

のように表される†．$a_{ij}\ldots$ は係数体の要素である．ここで，これらが添字の交換に関して反対称であると仮定する．賢明な読者は，記号 ξ_i によって張られるベクトル空間の外積代数 (外積多元環) を構築しようとしていることが分かるであろう．級数 (14.2) は，第 N 項までで終わるが，これは同じ ξ_i を繰り返して含む任意の単項式が，それ自身の符号を反転させたものと等しく，すなわちゼロとなるからである．偶数個の ξ_i 因子を持つ項だけを含む級数は，代数のすべての要素と交換するので“偶要素”(even element) もしくは“ボゾン的要素”(bosonic element) と呼ばれる．他方，奇数個の ξ_i 因子を持つ項で構成される級数は，互いに反交換するので“奇要素”(odd element) もしくは“フェルミオン的要素”(fermionic element) と

†(訳註) 各項に Einstein の規約が適用されることに注意されたい．

呼ばれる．物理学の文脈では偶要素同士，もしくは奇要素同士の加算しか必要でないが，これは数学的な制約ではない．

代数の要素を係数体の要素へ対応させる線形の汎関数として“積分”を定義する．特別に，

$$\int d\xi_N \dots d\xi_2 d\xi_1\, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_N = 1 \tag{14.3}$$

と置く．測度に現れる ξ_i の何れかが被積分関数から欠落している場合は，積分値をゼロと定義する．もちろん変数の順序は重要である．

$$\begin{aligned}\int d\xi_N \dots d\xi_2 d\xi_1 (a_{i_1,i_2,\dots i_N} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_N}) &= \epsilon_{i_1,i_2\dots i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} \\ &= N!\, a_{12\dots N}\end{aligned} \tag{14.4}$$

したがって，この積分は代数のひとつの要素を取り込むと，“最高次項”(top form)の係数を返す[‡]．この“積分”の定義は純粋に代数的なものであり，解析的な積分概念を含むわけではない――微分に関して示唆を与える点がないわけではないが，この記法は本質的に，代数操作を表記する便法として利用されるものに過ぎない．

Diracの荷電フェルミオンを扱うために，代数の中の生成素を倍にするとともに，要素 ξ_i を対応する要素 ξ_i^* に変え，積の順序を逆にして係数の複素共役をとる“対合変換”(involution) を定義する．“対合”の意味するところは，変換を 2 回行うと元の要素に戻る，すなわち $(\xi_i^*)^* = \xi_i$ ということである．これは一見して行列代数の Hermite共役と似ているけれども，ξ_i^* の実体は ξ_i とは独立の，全く別のものと見なさなければならない．

上記の規則に従い，次式を得る．

$$\int d\xi d\xi^* e^{\xi^* a \xi} = \int d\xi d\xi^* (1 + \xi^* a \xi) = a \tag{14.5}$$

$\xi^2 = (\xi^*)^2 = 0$ なので，指数関数を展開すると，第 2 項より後ろの級数はなくなる．より一般には，次式が得られる ($d\xi_N d\xi_N^* \dots d\xi_1 d\xi_1^*$ を省略して $d[\xi]d[\xi^*]$ と書く)．

$$\begin{aligned}\int d[\xi]d[\xi^*]\, e^{\xi_i^* A_{ij} \xi_j} &= \int d[\xi]d[\xi^*] A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N} \xi_1^* \xi_{i_1} \xi_2^* \xi_{i_2} \dots \xi_N^* \xi_{i_N} \\ &= \det A\end{aligned} \tag{14.6}$$

ここでは指数関数の展開項のうち，第 N 項だけが寄与を持つ．因子 $1/N!$ は，ξ_i^* 因子を自然な順序に配置するときに，同じ項が $N!$ 個生じることによって打ち消される．

[‡](訳註) $\epsilon_{i_1,i_2,\dots,i_N}$ は Levi-Civitaの記号と呼ばれるもので，$(i_1, i_2, \dots, i_N)$ が $(1, 2, \dots, N)$ の偶置換の場合は 1，奇置換の場合は -1，それ以外の場合はゼロである．

“実”の ξ_i を用いた指数関数の積分も定義できる．A_{ij} を $2N \times 2N$ の反対称な行列とすると，次のように書ける．

$$\begin{aligned}\int d[\xi]\, e^{\frac{1}{2}\xi_i A_{ij}\xi_j} &= \frac{1}{2^N N!}\int d[\xi] A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} \ldots A_{i_{2N-1} i_{2N}} \xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_{2N}} \\ &= \frac{1}{2^N N!}\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} \ldots A_{i_{2N-1} i_{2N}} \\ &= \mathrm{Pf}\, A \end{aligned} \tag{14.7}$$

最後の2行は，A の“Pfaff多項式”(Pfaffian) の定義となっている．A が反対称なら，次式を証明するのは簡単である．

$$(\mathrm{Pf}\, A)^2 = \det A \tag{14.8}$$

証明のひとつの方法としては，直交行列 O を用いた $\mathrm{Pf}\, A = \mathrm{Pf}(O^T A O)$ の関係に注意すればよい．それから，ほとんどすべての反対称な A に対して，$O^T A O$ が次のような 2×2 ブロックを用いた対角的な形に還元するような O が存在することに注意する．

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{14.9}$$

このような行列を考えれば，上記の定理は即座に証明される．

Gauss積分との類似性の議論を完結するために，次のような積分を定義して，評価しなければならない．

$$\int d[\xi]\, e^{\frac{1}{2}\xi_i A_{ij}\xi_j + \eta_i \xi_i} \tag{14.10}$$

これを行うためには，η_i が相互に反交換し，ξ_i とも反交換するような，より大きい代数を扱うことが必要になる．これらは積分されない“定数”として用いられる．積分を評価するために，指数の平方を完成し，積分変数をシフトしなければならない．収束する $[-\infty, +\infty]$ の範囲の実関数積分が，積分変数のシフトに影響を受けないように，ここでも変数のシフトが積分に影響しないことを確認する必要がある．式(14.3)に“積分領域”は示されていないが，もし $\xi' = \xi + \eta$ と置けば，

$$\int d\xi' \xi' = 1 = \int d\xi (\xi + \eta) \tag{14.11}$$

であり，1次元の積分は変数のシフトの下で不変である．一般のシフト $\xi_i \to \xi_i + \eta_i$ でも不変性は成り立つ．η_i は ξ_i のない単項式の中だけに現れ，それらは積分の結果，ゼロになるからである．

反対称行列の逆行列も，反対称行列になるので，次のように書ける.

$$\int d[\xi]\, e^{\frac{1}{2}\xi_i A_{ij}\xi_j + \xi_i\eta_i} = \int d[\xi]\, e^{\frac{1}{2}(\xi_i + A^{-1}_{ik}\eta_k)A_{ij}(\xi_j + A^{-1}_{jl}\eta_l) + \frac{1}{2}\eta_i A^{-1}_{ij}\eta_j}$$
$$= (\mathrm{Pf}\, A)\, e^{+\frac{1}{2}\eta_i A^{-1}_{ij}\eta_j} \propto \sqrt{\det A}\, e^{+\frac{1}{2}\eta_i A^{-1}_{ij}\eta_j} \tag{14.12}$$

ここでは実数 x の Gauss 積分と類似の関係が成立している——但し行列式が分母でなく，分子にあるという違いがある.

また，変数の線形変換 $\xi'_i = M_{ij}\xi_j$ を行うと，測度は次のように変換する.

$$d[\xi'] = (\det M)^{-1} d[\xi] \tag{14.13}$$

ここで Jacobi 行列式の " 逆数 " が現れるが，これも実変数の変換とは逆である.

" 複素Grassmann数 " に対しては，次式が得られる.

$$\int d[\xi]d[\xi^*]\, e^{\xi^*_i A_{ij}\xi_j + \xi^*_i\eta_i + \eta^*_i\xi_i} = \int d[\xi]d[\xi^*]\, e^{(\xi^*_i + \eta^*_k A^{-1}_{ki})A_{ij}(\xi_j + A^{-1}_{ji}\eta_l) - \eta^*_i A^{-1}_{ij}\eta_j}$$
$$= (\det A)\, e^{-\eta^*_i A^{-1}_{ij}\eta_j} \tag{14.14}$$

14.1.1 簡単な超対称性

次の Gauss 積分を考えよう.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d[\mathcal{F}]\, e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i\mathcal{F}^j} \tag{14.15}$$

$d[\mathcal{F}]$ は $\prod_{i=1}^{N} d\mathcal{F}^i/(2\pi)^{N/2}$ を意味する．積分 I は，もちろん $\det^{-\frac{1}{2}}|g_{ij}|$ に等しい．ここで $\mathcal{F}^i = \mathcal{F}^i(\varphi^\mu)$ と置いて，積分式を書き直すことができる．φ^μ はもうひと組の N 個の変数一式を表す．$\mathcal{F}(\varphi)$ が可逆な写像 $\mathcal{F}: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ を与えるものと仮定しよう．通常の変数変換によって，次式が得られる.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d[\varphi] J(\varphi)\, e^{-\frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i(\varphi)\mathcal{F}^j(\varphi)} \tag{14.16}$$

ここで，

$$J = \det\left(\frac{\partial\mathcal{F}^i}{\partial\varphi^\mu}\right) \tag{14.17}$$

は，変換の Jacobi 行列式である.

N 個一式の Grassmann 数を 2 組導入して，それぞれ $\bar{\psi}_i$，ψ^μ と記し，Jacobi 行列式を Berezin 積分で表すのに用いることにする.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d[\varphi]d[\psi]d[\bar{\psi}]\, e^{\bar{\psi}_i M^i_\mu \psi^\mu - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{F}^i(\varphi)\mathcal{F}(\varphi)} \tag{14.18}$$

$$M^i_\mu = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \varphi^\mu}$$

添字をギリシャ文字とローマン体に区別したのは，これらの添字の付いた変数が，それぞれ異なった役割を果たすからである．$\bar{\psi}$ を ψ の複素共役と考えてはいけないことも，添字の区別によって強調しておきたい．

最後にもうひと組，N 個の交換する変数 ω_i を導入して，次のように書く．

$$I = \det{}^{-\frac{1}{2}}|g_{ij}|\int d[\varphi]d[\psi]d[\bar{\psi}]d[\omega]\, e^{\bar{\psi}_i M^i_\mu \psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i \mathcal{F}^i(\varphi)}$$

g^{ij} は g_{ij} の逆行列である．積分を収束させるために，ω_i の積分を虚軸に沿って行わなければならない．両辺を $\det^{-\frac{1}{2}}|g_{ij}|$ で割ると，次式が得られる．

$$1 = \int d[\varphi]d[\psi]d[\bar{\psi}]d[\omega]\, e^{\bar{\psi}_i M^i_\mu \psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i \mathcal{F}^i(\varphi)} \tag{14.19}$$

これは単なる1という数を表すだけの，随分ひねくれた方法に見えるが，この書き替えられた積分が，関数 $\mathcal{F}^i$ や行列 g_{ij} に依存しないことは注目に値する．

この被積分関数は，もうひとつの注目すべき性質を持っている．それは“超対称性”変換 (supersymmetry transformation) に関する不変性である．無限小の超対称性変換を，次のように定義する．

$$\begin{aligned}\delta\varphi^\mu &= \epsilon\psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu = 0,\\ \delta\bar{\psi}_i &= \epsilon\omega_i, \quad \delta\omega_i = 0\end{aligned} \tag{14.20}$$

この変換は，交換する変数と反交換する変数を混合するものなので，交換する変分には交換する変数，反交換する変分には反交換する変数が加わるように，“反交換する無限小の定数”ϵ を導入した．

ここで，積分内の指数部分の変分を見てみよう．

$$\begin{aligned}\delta\left\{\bar{\psi}_i M^i_\mu \psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i\mathcal{F}^i(\varphi)\right\} &= \epsilon\left\{\omega_i M^i_\mu\psi^\mu - \bar{\psi}_i\frac{\partial M^i_\mu}{\partial\varphi^\nu}\psi^\nu\psi^\mu - \omega_i\frac{\partial\mathcal{F}^i}{\partial\varphi^\mu}\psi^\mu\right\}\\ &= 0\end{aligned} \tag{14.21}$$

(第2項は，積 $\psi^\nu\psi^\mu$ の反対称性と偏微分項の対称性の結合によってゼロとなる.) したがって，この“作用”は超対称性変換の下で不変である．

上記の特別な超対称性変換は，これをゲージ理論の文脈において導入したBecchi, RouetおよびStoraに因んで，BRS変換と呼ばれる．

ϵ を導入することで，任意の A および B に対して $\delta(AB) = (\delta A)B + A(\delta B)$ は代数となる．s という操作を定義して，ϵ の使用を避けることもできる．

$$s\varphi^\mu = \psi^\mu, \quad s\psi^\mu = 0,$$
$$s\bar{\psi}_i = \omega_i, \quad s\omega_i = 0 \tag{14.22}$$

しかしここでは，A と B の交換性や反交換性を直接扱うことにしよう．これを行うために，式に“等級”(grading) を与えることにする．A が偶 (偶数個の Grassmann 数を含む) であれば $g(A) = 0$ と置き，A が奇 (奇数個の Grassmann 数を含む) であれば $g(A) = 1$ と置く．この記法を用いると，

$$s(AB) = s(A)B + (-1)^{g(A)}As(B) \tag{14.23}$$

としなければならない．上記のような変則的な Leibnitz 規則に従う s という操作は“反微分”(antiderivation) と呼ばれる[1]．反微分 s は $s^2 = 0$ の性質を持つ．これは外微分 d，もしくはホモロジー代数 (homology algebra) において，境界 (∂) をとる操作を想起させる．超対称性は，ホモロジーやコホモロジーと密接に関係している．

恒等式 $s^2 = 0$ は，作用がなぜ超対称性を持つのかという点について洞察を与える．作用は何かの s になっているのである．実際に，

$$\left\{\bar{\psi}_i M^i_\mu \psi^\mu + \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \omega_i\mathcal{F}^i(\varphi)\right\} = s\left\{\bar{\psi}_i\left(\frac{1}{2}g^{ij}\omega_j - \mathcal{F}^i(\varphi)\right)\right\} \tag{14.24}$$

であり，任意の式に関して s の s は常にゼロなので，作用の s はゼロになる．

超対称性の起源に対する洞察を更に深めるために，“超ポテンシャル”(superpotential) と呼ばれる，次式を満たす関数 $W(\varphi)$ の存在を仮定しよう．

$$\mathcal{F}^i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \tag{14.25}$$

ここでギリシャ文字とローマン体の添字の区別をなくし，φ_i，ψ_i，$\bar{\psi}_i$，ω_i をすべて結合させた，次の“超場”(superfield) $\Phi_i(\theta,\bar{\theta})$ を考えることに意味が生じる．

$$\Phi_i(\theta,\bar{\theta}) = \varphi_i + \bar{\theta}\psi_i + \bar{\psi}_i\theta + \bar{\theta}\theta\omega_i \tag{14.26}$$

$\bar{\theta}$ と θ は Grassmann 数の対である．我々はこれらを“超空間”(superspace) における反交換座標と考え，式(14.26) を超空間の原点に関する超場の Taylor 展開と考えることにする．もちろん $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$ なので，Taylor 展開はすぐに終わる．

[1] 通常の Leibnitz 規則に従う操作を“微分”(derivation) と呼ぶ．これは必ずしも導関数を含む必要がない．ひとつの例は，行列における Ad_M 操作である．これは $\mathrm{Ad}_M A = [M, A]$ と定義される．Leibnitz 規則は Jacobi の恒等式から導かれる．

次式に注意する.

$$S = \int d\theta d\bar{\theta}\left\{\frac{1}{2}g^{ij}\Phi_i\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\bar{\theta}}\Phi_j - W(\Phi)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \frac{\partial W}{\partial\varphi_i}\omega_i + \bar{\psi}_i\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\psi_j$$
$$= \frac{1}{2}g^{ij}\omega_i\omega_j - \mathcal{F}^i\omega_i + \bar{\psi}_i\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\psi_j \tag{14.27}$$

($\partial_\theta\Phi$ のような偏微分は, θ を含むすべての項において θ を一番左まで交換してから行う. この操作により ∂_θ が反微分になる.) これは超ポテンシャルから $\mathcal{F}$ が与えられる特別な場合の作用である.

$\bar{\theta} \to \bar{\theta} + \epsilon$ の変換により,

$$\Phi_i \;\to\; (\varphi_i + \epsilon\psi_i) + \bar{\theta}\psi_i + (\bar{\psi}_i + \epsilon\omega_i)\theta + \bar{\theta}\theta\omega_i \tag{14.28}$$

となる. この超並進は明らかに, 先に示した, 成分となるそれぞれの場の超対称性変換と一致する. したがって, この作用は超対称性変換の下で不変である. しかし式(14.27)のような作用が超対称性を持つことは, 驚くべきことではない. 結局この作用は, 何かを超空間全域で積分して得たものなのである.

14.2 Fermi粒子系のコヒーレント状態

ここで量子力学のHilbert空間による記述との関係を見いださなければならない. $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$ の関係を持つ, Fermi粒子の消滅演算子と生成演算子から話を始める. ξ と ξ^* を, $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$ と反交換するGrassmann数とする. これは ξ が $|0\rangle$ と交換し, $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$ と反交換することを意味する.

“Fermi粒子系のコヒーレント状態” (fermionic coherent state) を, 次式で定義する.

$$|\xi\rangle = e^{\hat{a}^\dagger\xi}|0\rangle = (1 + \hat{a}^\dagger\xi)|0\rangle = |0\rangle - \xi|1\rangle \tag{14.29}$$

これは, ξ を固有値とする $\hat{a}$ の固有状態である.

$$\hat{a}|\xi\rangle = \hat{a}|0\rangle - \hat{a}\xi|1\rangle = \xi\big(|0\rangle - \xi|1\rangle\big) = \xi|\xi\rangle \tag{14.30}$$

我々はHermite共役を, 通常の $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ の変換と, Grassmann数に対する対合変換 $\xi \to \xi^*$ によって定義する. すなわち,

$$\left(e^{\hat{a}^\dagger\xi}\right)^\dagger = e^{\xi^*\hat{a}} \tag{14.31}$$

である．ここから次の関係が見いだされる．

$$\begin{aligned}\langle\xi_1|\xi_2\rangle &= \langle 0|e^{\xi_1^*\hat{a}}e^{\hat{a}^\dagger\xi_2}|0\rangle = \langle 0|(1+\xi_1^*\hat{a})(1+\hat{a}^\dagger\xi_2)|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle + \langle 0|\xi_1^*\hat{a}\hat{a}^\dagger\xi_2|0\rangle \\ &= 1+\xi_1^*\xi_2 = e^{\xi_1^*\xi_2}\end{aligned} \tag{14.32}$$

最終的に，次の完全性の関係式を得る．

$$\begin{aligned}\int d\xi^* d\xi\, e^{-\xi^*\xi}\,|\xi\rangle\langle\xi| &= \int d\xi^* d\xi\,(1-\xi^*\xi)\big(\,|0\rangle - \xi|1\rangle\big)\big(\langle 0| + \xi^*\langle 1|\,\big) \\ &= \int d\xi^* d\xi\,(1-\xi^*\xi)\big(\,|0\rangle\langle 0| + \xi\xi^*|1\rangle\langle 1|\,\big) \\ &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I\end{aligned} \tag{14.33}$$

上式を分配関数 $\mathrm{Tr}\,\{e^{-\beta\hat{H}}\}$ の径路積分表示に適用してみよう．最も単純なハミルトニアン $\hat{H}=\hat{a}^\dagger h\hat{a}$ から始める．h は単なる数である．$\hat{H}$ の固有値は 0 または h なので，分配関数は次のようになる．

$$\mathrm{Tr}\,\{e^{-\beta\hat{H}}\} = 1+e^{-\beta h} \tag{14.34}$$

中間状態を挿入する計算から，上式を得ることを考える．

$$\mathrm{Tr}\,\{e^{-\beta\hat{H}}\} = \sum_{n_i=0,1}\langle n_N|e^{-\frac{\beta}{N}\hat{H}}|n_{N-1}\rangle\langle n_{N-1}|e^{-\frac{\beta}{N}\hat{H}}|n_{N-2}\rangle\ldots\langle n_1|e^{-\frac{\beta}{N}\hat{H}}|n_N\rangle \tag{14.35}$$

これは近似的に，次のようになる．

$$\begin{aligned}\sum_{n_i=0,1}\langle n_N|\Big(1-\frac{\beta}{N}\hat{H}\Big)|n_{N-1}\rangle\langle n_{N-1}|\Big(1-\frac{\beta}{N}\hat{H}\Big)|n_{N-2}\rangle\ldots \\ \ldots\langle n_1|\Big(1-\frac{\beta}{N}\hat{H}\Big)|n_N\rangle\end{aligned} \tag{14.36}$$

完全性を用いて，

$$\sum_{n=0,1}|n\rangle\langle n| \;\to\; \int d\xi^* d\xi\, e^{-\xi^*\xi}|\xi\rangle\langle\xi| \tag{14.37}$$

と置き換え，

$$\langle\xi_{i+1}|\Big(1-\frac{\beta}{N}\hat{H}\Big)|\xi_i\rangle \;\to\; \langle\xi_{i+1}|\xi_i\rangle\Big(1-\frac{\beta}{N}\xi_{i+1}^* h\xi_i\Big) = e^{\xi_{i+1}^*\xi_i - \frac{\beta}{N}\xi_{i+1}^* h\xi_i} \tag{14.38}$$

とすると，次式が成立するように思われる (が，直ちに誤りが判明する)．

$$\mathrm{Tr}\,\{e^{-\beta\hat{H}}\} \stackrel{?}{=} \int d[\xi^*]d[\xi]\, e^{\left\{-\sum_i\left(\xi_{i+1}^*(\xi_{i+1}-\xi_i)+\frac{\beta}{N}\xi_{i+1}^* h\xi_i\right)\right\}} \tag{14.39}$$

右辺の積分は，我々が先に考えた形になっており，次の行列式に等しい．

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{\beta h}{N}-1\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \left(\frac{\beta h}{N}-1\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\beta h}{N}-1\right) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{14.40}$$

これは次のようになる．

$$1+(-1)^{N+1}\left(\frac{\beta h}{N}-1\right)^N = 1-\left(1-\frac{\beta h}{N}\right)^N \approx 1-e^{-\beta h} \tag{14.41}$$

この結果には符号の誤りがある！ 問題は一番外側の積分から生じている．$\hat{A}$ が偶であると (今の応用のように) 仮定すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}\int d\xi^* d\xi \, \langle\xi|\hat{A}|\xi\rangle \, e^{-\xi^*\xi} &= \int d\xi^* d\xi \big(\langle 0| + \xi^*\langle 1|\big)\hat{A}\big(|0\rangle - \xi|1\rangle\big)(1-\xi^*\xi) \\ &= \int d\xi^* d\xi \big(\langle 0|\hat{A}|0\rangle + \xi^*\xi\langle 1|\hat{A}|1\rangle\big)(1-\xi^*\xi) \\ &= \langle 0|\hat{A}|0\rangle - \langle 1|\hat{A}|1\rangle = \mathrm{tr}\left\{(-1)^{\hat{F}}\hat{A}\right\} \end{aligned} \tag{14.42}$$

$\hat{F}$ は Fermi 粒子数を数える演算子である．$\hat{A}$ のトレースを得るためには，次式を用いなければならない．

$$\mathrm{tr}\left\{\hat{A}\right\} = \int d\xi^* d\xi \, \left\langle \xi \middle| \hat{A} \middle| (-\xi) \right\rangle e^{-\xi^*\xi} \tag{14.43}$$

これは Grassmann 数に“反周期境界条件”を課さねばならないことを意味している．我々は第 11 章でも，この反周期境界条件の要請を見ている．

この結果を行列 H へ拡張するのは簡単である．$\hat{H} = \hat{a}^\dagger_\alpha H_{\alpha\beta}\hat{a}_\beta$ ならば，

$$\mathrm{tr}\left\{e^{-\beta\hat{H}}\right\} = \int d[\xi]d[\xi^*] \, e^{-\int_0^\beta (\xi^*_\alpha\partial_t\xi_\alpha + \xi^*_\alpha H_{\alpha\beta}\xi_\beta)} \tag{14.44}$$

として，ξ に反周期境界条件を課すればよい．

14.3 超伝導

Berezin 積分の物理的な応用として，超伝導の BCS 理論を展開してみよう．

非相対論的なスピン $\frac{1}{2}$ のFermi粒子気体の分配関数は，Berezin径路積分で次のように書かれる．

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)\\ &= \int d[\psi]d[\psi^\dagger]\, e^{\left(-\int_0^\beta d^3x d\tau \left\{\sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m}\nabla^2 - \mu\right)\psi_\alpha - g\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1\right\}\right)}\end{aligned} \tag{14.45}$$

添字 $\alpha = 1, 2$ はスピンの 2 成分 $\uparrow$, $\downarrow$ を表す．Grassmann数で表したFermi場は，$\tau \to \tau + \beta$ のシフトに関して反周期的であるものとする．2 次でない項 $\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1$ があるが，コヒーレント状態の間では，$\hat{\psi}_1^\dagger$ のようなすべての演算子がGrassmann数の固有値に置き換えられるので問題はない．

式(14.45)には，短距離相互作用の項 $-g\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1$ を含めた．g が正ならば，粒子間には引力がはたらくことになる．粒子間引力を与えられた系が十分低温になると，常伝導 (常流動) 状態は不安定となり，超伝導転移を起こす．この不安定性を見るために，補助的な複素スカラー場 Δ を導入する．これは超伝導秩序パラメーターとなる．相互作用項を分割して次のように書く．

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = \int d[\psi]d[\psi^\dagger]d[\Delta]d[\Delta^*] \exp\Bigg(-\int_0^\beta d^3x d\tau \Bigg\{ \sum_{\alpha=1}^2 \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_\tau - \frac{1}{2m}\nabla^2 - \mu\right)\psi_\alpha \\ -\Delta^*\psi_2\psi_1 - \Delta\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger + \frac{1}{g}|\Delta|^2 \Bigg\}\Bigg)\end{aligned} \tag{14.46}$$

Δ の運動方程式から，$\Delta \equiv g\psi_2\psi_1$ と与えられる．

次にFermi粒子の積分を行い，Δ 場に対する有効作用を見いだす．ここからは，温度 β^{-1} をゼロと置くことにする．

Grassmann場の反交換性に注意して，指数の ψ_α，$\psi_\alpha^\dagger$ に関する 2 次式の部分を，行列形式に直すことができる．

$$S = \int d^3x d\tau \left(\psi_1^\dagger, \psi_2\right) \begin{pmatrix} \partial_\tau - \dfrac{\nabla^2}{2m} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & \partial_\tau + \dfrac{\nabla^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} \tag{14.47}$$

Fermi粒子の有効作用への寄与は，微分演算子の行列に関するFredholm行列式の対数で与えられる．

$$S_{\mathrm{F}} = -\ln \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \partial_\tau - \dfrac{\nabla^2}{2m} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & \partial_\tau + \dfrac{\nabla^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \tag{14.48}$$

最初に Δ が定数であると仮定する．このとき S_{F} は次のように書かれる．

$$S_{\mathrm{F}} = \int d^3x d\tau \left\{ -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \operatorname{tr} \ln \begin{pmatrix} i\omega + \dfrac{k^2}{2m} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & i\omega - \dfrac{k^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \right\} \tag{14.49}$$

便利なエネルギー変数 $\epsilon = k^2/2m - \mu$ を導入すると，運動量積分は次のようになる．

$$I = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \ln\left(\omega^2 + |\Delta|^2 + \epsilon^2\right) \tag{14.50}$$

k 空間の球対称な性質を利用して，k に関する積分を，ϵ に関する積分に置き換えることができる．

$$I = \int \rho(\epsilon) d\epsilon \frac{d\omega}{2\pi} \ln\left(\omega^2 + |\Delta|^2 + \epsilon^2\right) \tag{14.51}$$

$\rho(\epsilon)$ は状態密度である．式(14.51)の Δ に関する微分を評価する．

$$\frac{dI}{d\Delta} = \int d\epsilon \frac{d\omega}{2\pi} \rho(0) \frac{\Delta^*}{\omega^2 + |\Delta|^2 + \epsilon^2} \tag{14.52}$$

式(14.52)では，$\rho(\epsilon)$ を $\rho(0)$ で近似した．非積分関数が Fermi 面 $\epsilon = 0$ のところにピークを持つので，この近似が成立する．積分を有限にするために，切断 (cut-off) を導入しなければならない．フォノンが電子間引力を媒介する BCS 超伝導体では，Debye 振動数に相当するエネルギー ϵ_{D} 以上で，引力相互作用が消失する．これを切断の値とすると，次の結果を得る．

$$\frac{dI}{d\Delta} = \frac{\rho(0)}{2} \int_{-\epsilon_{\mathrm{D}}}^{\epsilon_{\mathrm{D}}} \frac{\Delta^* d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}} = \rho(0)\Delta^* \sinh^{-1} \frac{\epsilon_{\mathrm{D}}}{|\Delta|} \approx \rho(0)\Delta^* \ln \frac{\epsilon_{\mathrm{D}}}{|\Delta|} \tag{14.53}$$

これを指数の $|\Delta|^2$ の部分と一緒に用いて，有効作用 (単位時空体積あたりの作用) が，Δ に関して次の条件下で最小になることが分かる．

$$\frac{dV_{\mathrm{eff}}}{d\Delta} = \left(\frac{\Delta^*}{g} + \rho(0)\Delta^* \ln \frac{|\Delta|}{\epsilon_{\mathrm{D}}} \right) = 0 \tag{14.54}$$

すなわち，

$$|\Delta| = |\Delta_0| = \epsilon_{\mathrm{D}} \exp\left\{ -\frac{1}{g\rho(0)} \right\} \tag{14.55}$$

のときに，有効ポテンシャルが最小となる．この有効ポテンシャルの最小値は，次式で与えられる．

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{g}|\Delta|^2 + \frac{\rho(0)}{2}\left\{ |\Delta|^2 \ln \frac{|\Delta|^2}{\epsilon_{\mathrm{D}}^2} - |\Delta|^2 \right\} \tag{14.56}$$

14.3.1 有効作用

Δ の平衡値を 1 ループの次数で求めたので，次に $\Delta = \langle\Delta\rangle + \eta$ と置いて η の積分を実行しなければならない．しかし実際のゆらぎは小さいので，伝統的な超伝導物理のほとんどの部分に関しては，Δ を平均場に置き換えて，ゆらぎ積分の先へ議論を進めることができる．しかるに超伝導体が，平衡からの小さなずれに対して，どのように応答するかを理解することも有用である．これはFredholm行列式，もしくは時間と空間の座標に依存する Δ 場に対する，1 ループ有効作用 $S_{\mathrm{F}}(\Delta)$ の計算によって調べることができる．Δ の“位相の変動”は，自発的な対称性の破れに伴う Goldstoneボゾンとなるので，この場が“低エネルギーの有効作用”を決めるのに重要な役割を果たす．系の対称性から，この有効作用が含むほとんどの項を見いだすことができる．

一様な“ねじれ”の効果から考察を始めよう．秩序パラメーターの位相が，位置に対して線形に変化しており，$\Delta(x) = e^{2ik_{\mathrm{s}}x}\Delta_0$ と表されると仮定する．これは速度 $v_{\mathrm{s}} = k_{\mathrm{s}}/m$ の一様な超流動状態を表す．

次の行列の Fredholm行列式を見いだす必要がある．

$$K = \begin{pmatrix} \partial_\tau - \dfrac{\nabla^2}{2m} - \mu & \Delta_0 e^{2ik_{\mathrm{s}}x} \\ \Delta_0^* e^{-2ik_{\mathrm{s}}x} & \partial_\tau + \dfrac{\nabla^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \tag{14.57}$$

ここで，

$$U = \begin{pmatrix} e^{ik_{\mathrm{s}}x} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{\mathrm{s}}x} \end{pmatrix} \tag{14.58}$$

を用いて，行列 K を次のように変換できる．

$$U^{-1}KU = \begin{pmatrix} \partial_\tau - \dfrac{(\nabla + ik_{\mathrm{s}})^2}{2m} - \mu & \Delta_0 \\ \Delta_0^* & \partial_\tau + \dfrac{(\nabla - ik_{\mathrm{s}})^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \tag{14.59}$$

このようなユニタリー変換によって行列式は変わらないので[2)]，$\ln \mathrm{Det}\, K$ を Fourier 変換して評価することにする．

$$\frac{1}{VT}\ln \mathrm{Det} K = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,\mathrm{tr}\,\ln \begin{pmatrix} i\omega + \dfrac{(k + k_{\mathrm{s}})^2}{2m} - \mu & \Delta_0 \\ \Delta_0^* & i\omega - \dfrac{(k - k_{\mathrm{s}})^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \tag{14.60}$$

2) これは相対論的な系では成立しない．相対論的な系では，行列式はこのようなカイラル変換によって，アノマリーのために変わってしまう．非相対論的な系ではアノマリーがない．

$$
= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi}
$$
$$
\times \operatorname{tr} \ln \begin{pmatrix} (i\omega + v_s k) + \frac{k^2}{2m} - \left(\mu - \frac{k_s^2}{2m}\right) & \Delta_0 \\ \Delta_0^* & (i\omega + v_s k) - \frac{k^2}{2m} + \left(\mu - \frac{k_s^2}{2m}\right) \end{pmatrix} \tag{14.61}
$$

正味の効果は $i\omega \to i\omega + v_s k$, $\mu \to \mu - k_s^2/2m$ のようにシフトする．

一時的に ω のシフトを忘れるならば，小さい k に関して，

$$
S_F(\Delta_0 e^{2ik_s x}) = S_F(\Delta_0) - (VT)\frac{k_s^2}{2m}\frac{\partial S_F}{\partial \mu} \tag{14.62}
$$

となる．$-\partial S_F/\partial\mu$ は数密度なので，

$$
S_F(\Delta_0 e^{2ik_s x}) = S_F(\Delta_0) + (VT)\rho\frac{k_s^2}{2m} \tag{14.63}
$$

である．これは全体が $v_s = k_s/m$ の速度で，一様かつ定常的に流れる状態について予想される結果である．

ω の積分路が虚軸からずれることの影響を考えてみよう．式(14.63)の密度を評価する際に，ω の積分路によって，様々な準粒子モードの占有数が決まる．これらのモードはGreen関数 $\langle\psi^\dagger\psi\rangle$ の $\omega = \pm\sqrt{\epsilon^2 + |\Delta|^2}$ における極として現れる．積分路は負のエネルギーの状態を囲むように設定しなければならず，これによって占有される状態が決まる．負のエネルギー状態は，$k \ll k_f$ において粒子的であり，$k \gg k_f$ において正孔的 (空孔的) である．v_s が十分大きければ，$iv_s \cdot k$ のシフト以前に積分路の内側にあった極が，積分路の外側に出て非占有状態となったり，反対に非占有の状態が占有状態になったりする．このことの物理的な理由は，移動する流体の中に生じる準粒子を静止座標系から見ると，そのエネルギーは $\omega(k)$ から $\omega(k) + v_s k$ へとDopplerシフトを起こしていることに依る．化学ポテンシャル μ を用いて平均粒子数を決めることは，定在的な壁を持つ容器の中での平衡状態を意味しており，容器の座標から見て，準粒子は負のエネルギー状態にもなる．占有数が変わらない v_s の範囲があり，したがって v_s が，ある臨界値より小さいときには“常流動”流体が生じない．v_{crit} 以上では，式(14.63)の ρ を，実効的な ρ_s に置き換えなければならない．占有数の変更は，系の運動量を減らす傾向を持つので $\rho_s < \rho$ である．超流動成分だけが流れを生じ，常流動成分は静止状態を保つ．

ここで，時間変化 $\Delta = e^{2i\Omega t}\Delta_0$ を考える．これは $\mu \to \mu - i\Omega$ のシフトを生じるので，小さい Ω に関して，

$$
S_F(e^{2i\Omega t}\Delta_0) = S_F(\Delta_0) + (VT)i\rho\Omega \tag{14.64}
$$

である．したがってEuclid空間の作用 $S_{\rm F}$ は，次のような項を含む．

$$S_{\rm F}(\Delta) \approx S_{\rm F}(\Delta_0) + \int d^3x dt \left\{ i\rho\partial_\tau\phi/2 + \frac{\rho}{2m}(\partial_x\phi/2)^2 \right\} \tag{14.65}$$

ここで $\Delta = \Delta_0 e^{i\phi(x,t)}$ である．

もし我々が (これまで用いてきた松原の虚時間ではなく) 実時間を用いるならば，少なくとも $v_{\rm s} < v_{\rm crit}$ のときに，$S_{\rm F}$ は位相変換 $\Delta \to \left(e^{imv_{\rm s}x - i\frac{1}{2}v_{\rm s}^2 t}\right)^2\Delta$ の下で不変である．これは流体中の全粒子に作用するGalilei変換にあたる．流体と容器が一緒に動くとき，$v_{\rm s} > v_{\rm crit}$ であっても占有数は変わらない．この状況では，積分路は $v_{\rm s}k$ の移動によって占有数に影響を与えないように選ばなければならない．

低エネルギーの有効作用を更に詳しく考え，密度の変化の効果と，外部ゲージ場を導入すると (但し Δ と同等の大きさのゆらぎ[3]は考えない)，次の作用が得られる．

$$S = \int d^3x dt \left\{ -\rho\left(\frac{\partial\phi/2}{\partial t} - eA_0\right) - \frac{\rho}{2m}(\nabla\phi/2 - e\mathbf{A})^2 - \lambda(\rho-\rho_0)^2 \right\} \tag{14.66}$$

λ は系の応答として，密度の一様な変化を与えるパラメーターである．

ここで場 $\Psi = \sqrt{\dfrac{\rho}{2}}e^{i\phi}$ を“定義”する．記憶を助ける便法として，Ψ がCooper対(つい)の“波動関数”であると考えてもよい[4]．さらにCooper対の電荷にあたる $e^* = 2e$，Cooper対の質量にあたる $m^* = 2m$ を定義する．最後に $\rho_0^* = \rho_0/2$ と置くが，これはCooper対の密度を表すことになる．

これらの定義により，式(14.66)を単純な形に書き直すことができる．ρ^* の高次の勾配まで，次式と等価になる．

$$S = \int d^3x dt \left\{ i\Psi^\dagger(\partial_t - ie^*A_0)\Psi - \frac{1}{2m^*}\left|(\nabla - ie^*\mathbf{A})\Psi\right|^2 - \frac{\lambda}{2}\left(|\Psi|^2 - \rho_0\right)^2 \right\} \tag{14.67}$$

この最後の作用の式を変分すると，Galilei不変なGross-Pitaevskiiの非線形Schrödinger方程式が得られる．

$$i(\partial_t - ie^*A_0)\Psi = -\frac{1}{2m^*}(\nabla - ie^*\mathbf{A})^2\Psi + \lambda\left(|\Psi|^2 - \rho_0^*\right)\Psi \tag{14.68}$$

第11章からわかるように，この式は電子気体が荷電流体のように振舞うことを表している．すでに見たように，そのような流体はMeissner効果などの超伝導現象を示す．

---

[3] これらはGoldstoneモードの励起に対応しないので，低エネルギーの有効作用には現れない．

[4] Δ が凝縮体の波動関数であるという書き方をしているテキストもあるが，このような記述は誤解を招くものであると思う．波動関数の振幅は粒子密度に関係づけられなければならないが，一般に $|\Delta|$ と $\sqrt{\rho}$ の間に単純な関係はない．

第 15 章　格子場の理論

相対論的な場の理論において Feynman ダイヤグラムを展開すると，短距離 (大きな運動量) において発散する積分が現れる．よく定義された理論を得るためには，これらの発散を“正則化”する必要がある．これを行う方法はいろいろあるが，理論を時空内の離散的な格子の上に構築する方法 (格子正則化) が，概念的にも実践的にも有効である．本章では格子場の理論を扱う．

15.1　Bose粒子場

格子間隔 a の d 次元正方格子を考え，各点 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbf{Z}^d$ に，実変数 $\varphi(\mathbf{n})$ を付与することにする．

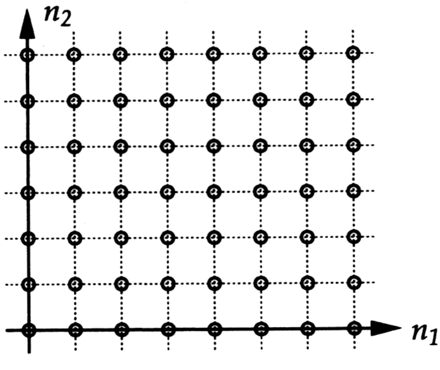


図 15.1　正方格子.

次の積分を考える．

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] \exp\left\{ -\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^d} \sum_{i=1}^{d} a^d \left[\frac{1}{2} \frac{(\varphi(\mathbf{n}+\mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{n}))^2}{a^2} + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\mathbf{n}) \right] \right\} \tag{15.1}$$

$d[\varphi]$ は $\prod_{\mathbf{n}} d\varphi(\mathbf{n})$ を省略したもので，$\mathbf{i}$ は i 番目の成分が 1 である $(\ldots, 1, \ldots)$ とい

うベクトルを表す．$\mathcal{Z}$ は何らかの統計的な分配関数と考えなければならない．指数部分は，次の作用に対する近似を意図したものである．

$$L = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \right\} \tag{15.2}$$

次のようなGreen関数が，関心の対象となる．

$$\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_1)\ldots\hat{\varphi}(\mathbf{n}_n)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int d[\varphi]\{\varphi(\mathbf{n}_1)\ldots\varphi(\mathbf{n}_n)\}\, e^{\{-\Sigma_{\mathbf{n}}\Sigma_{i=1}^{d}(\ldots)\}} \tag{15.3}$$

$\varphi(\mathbf{n})$ をFourier変換する単純な手続きを用いて上式を評価する．議論を簡単にするため，当面は $a=1$ と置くことにするが，次元解析によって，いつでも a を復活させることができる．$\varphi(\mathbf{n})$ をFourier成分に展開する．

$$\varphi(\mathbf{n}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} \tag{15.4}$$

格子が離散的であるため，運動量 $\mathbf{k}$ の値は，Brillouin領域 (Brillouin zone) の中に制約される．

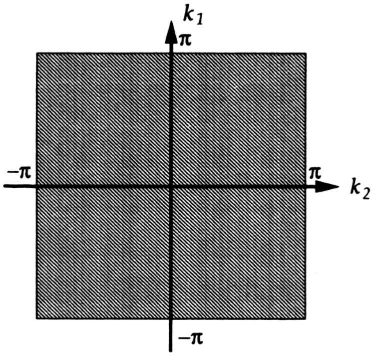


図 15.2 Brillouin領域.

格子Fourier変換において，次の2つの恒等式，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{n}')\cdot\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \tag{15.5}$$

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} = \sum_{\mathbf{m}}(2\pi)^d\,\delta^d(\mathbf{k}-\mathbf{k}'+2\pi\mathbf{m}) \tag{15.6}$$

を適用すると，次の変換式が与えられる．

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}\varphi(\mathbf{n}) \tag{15.7}$$

$a=1$ とし，$\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ を用いて分配関数を表すと，次のようになる．

$$\mathcal{Z}=\int d[\tilde{\varphi}]\, e^{-\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{2}\left[m^2+2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)\right]|\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2} \tag{15.8}$$

2 点関数は，指数の 2 次形式を決める行列の逆行列によって，次のように与えられる．

$$\left\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1)\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2)\right\rangle=\delta^d(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\frac{(2\pi)^d}{m^2+2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)} \tag{15.9}$$

格子空間における 2 点関数は，次のように表される．

$$\left\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{n}_1)\tilde{\varphi}(\mathbf{n}_2)\right\rangle=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{n}')\cdot\mathbf{k}}}{m^2+2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)} \tag{15.10}$$

$\mathbf{k}$ が小さいときには，

$$2(1-\cos k)=k^2+O(k^4) \tag{15.11}$$

であり，被積分関数が連続極限の形に近づく．

格子伝播関数に対する洞察を深めるために，式(15.1)の指数部分を書き直してみる．

$$\mathcal{Z}=\int d[\varphi]\exp\left\{+\sum_{\mathbf{n},\mathbf{i}}\varphi(\mathbf{n}+\mathbf{i})\varphi(\mathbf{n})-\sum_{\mathbf{n}}\frac{1}{2}(2d+m^2)\varphi^2(\mathbf{n})\right\} \tag{15.12}$$

スケール変換 $\varphi\to\sqrt{2d+m^2}\,\varphi$ を行い，Jacobi行列式を測度に吸収させる．

$$\mathcal{Z}=\int d\Big[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}}\Big]\exp\left\{\frac{1}{2d+m^2}\sum_{\mathbf{n},\mathbf{i}}\varphi(\mathbf{n}+\mathbf{i})\varphi(\mathbf{n})-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{n}}\varphi^2(\mathbf{n})\right\} \tag{15.13}$$

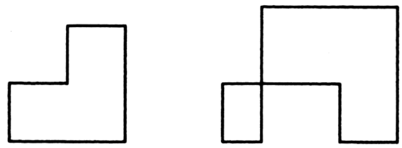
m^2 が大きいならば，指数関数を 1 次まで展開して，典型的な“強結合”(strong-coupling) もしくは“高温”の表式を導くことに意味がある．

$$\mathcal{Z}=\int d\Big[\frac{\varphi}{\sqrt{2\pi}}\Big]\left(1+\frac{1}{2d+m^2}\sum_{\mathbf{n},\mathbf{i}}\varphi(\mathbf{n}+\mathbf{i})\varphi(\mathbf{n})+\dots\right)e^{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{n}}\varphi^2(\mathbf{n})} \tag{15.14}$$

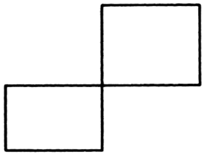
次のような公式，

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}=1,\\
&\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi^{2n+1}e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}=0,\\
&\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi^{2}e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}=1,\\
&\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi^{4}e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}=3,\qquad \text{etc.}
\end{aligned} \tag{15.15}$$

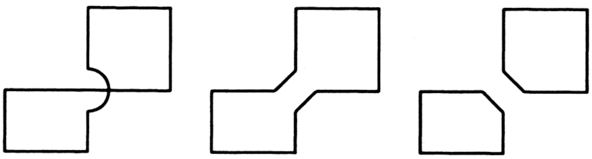
を用いて，展開を，



のような閉じたループを構成するダイヤグラムに組織化することができる．それぞれの格子点間の結合線 (link) には $1/(m^2+2d)$ の重みが付く．φ^4 の積分結果の 3 は，たとえばひとつの交差を含んでいる，



のようなダイヤグラムが，重み $+3$ を持つことを意味する．これは交点において想定される，次に示すような 3 種類の接続方法に関する和として理解される．



式(15.14)の指数の展開から生じる他のすべての組み合わせ因子と，それに伴う積分は，$\mathcal{Z}$ の展開を，閉じた非相互作用ループの“気体”(もしくは“溶液”) の分配関数にする．$n!$ が実際にこのように働くことを証明するためには，格子酔歩 (lattice random walk) の理論を調べる必要がある．この問題を取り上げる前に，Green関数を計算する際に，$\varphi(\mathbf{n})$ が径路の始点もしくは終点となる源として働くことを注意しておきたい．

因子 $1/\mathcal{Z}$ は，連結していない真空ループを取り去る働きをする．

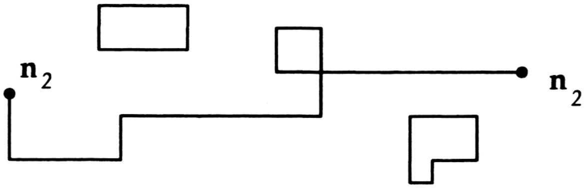


図 15.3 $\left\langle\hat{\varphi}(\mathbf{n}_1)\hat{\varphi}(\mathbf{n}_2)\right\rangle$ の展開に含まれるグラフ.

15.2 酔歩

ひとまず場の理論のことは措き，超立方格子上の酔歩の理論を考察しよう．$\mathbf{n}_1$ から $\mathbf{n}_2$ に至る，t ステップ分の長さを持つ径路の数 (t は整数) を，

$$\Gamma(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1, t) \equiv \Gamma(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1, 0, t) \tag{15.16}$$

と表すことにする．少し考えると $\Gamma(\mathbf{n}, 0, t)$ は，

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \ldots + x_d + \frac{1}{x_d}\right)^t \tag{15.17}$$

を展開したときの $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_d^{n_d}$ の係数であることが分かる．$x_i = e^{ik_i}$ と置くと，Fourier積分によって，この係数を取り出すことができる．

$$\Gamma(\mathbf{n}, 0, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} (2\cos k_1 + 2\cos k_2 + \ldots + 2\cos k_d)^t \tag{15.18}$$

それから，次のように G を定義する．

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t}\, \Gamma(\mathbf{n}, 0, t) \tag{15.19}$$

$G(\mathbf{n}, 0, \mu)$ は本質的に，伝播関数 (15.10) を表している．

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}}{1 - e^{-\mu} \sum_{i=1}^{d} (2\cos k_i)} \tag{15.20}$$

ここで $e^{-\mu} = (m^2 + 2d)^{-1}$ と置くと，式(15.20)は次のようになる．

$$G(\mathbf{n}, 0, \mu) = (m^2 + 2d) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}}{m^2 + 2\sum_{i=1}^{d} (1 - \cos k_i)} \tag{15.21}$$

積分の前の因子は，式(15.13)で行ったスケール変換を反映している．これで $\mathbf{n}_1$ から $\mathbf{n}_2$ を結ぶすべての径路について，各々の結合線に $(m^2 + 2d)^{-1}$ の重みを付けた総和により，格子伝播関数が得られることが示された．

閉じた真空ループを足し合わせて，格子場の Ouroboros ダイヤグラムを得る際には，重複を避けるための注意が必要である．ループ上の 1 点を固定して，その点を通るすべての径路の和を取るものとしよう．

$$e^{-\mu t}\,\Gamma(\mathbf{n},\mathbf{n},t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,e^{-\mu t}\left(2\sum_{i=1}^{d}\cos k_i\right)^t \tag{15.22}$$

$\mathbf{n}$ に関して和をとる場合，$2t$ による割り算を忘れてはならない．ループ上に結節点を選ぶ t 通りの方法から，分配関数に対して同じ寄与が現れるために，因子 t による除算が生じる．因子 2 は，同一ループの巡回方向を違えることで，同じ項が現れることに依る ($\varphi(\mathbf{n})$ が複素場で表される荷電粒子場を扱うときには，この因子は不要である．複素場の結合線は方向を持つ)．

したがって，ひとつのループで表される項の総和は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&N\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2t}\,e^{-\mu t}\left(2\sum_{i=1}^{d}\cos k_i\right)^t\\
&=-\frac{N}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln\left(1-e^{-\mu}\sum_{i=1}^{d}(2\cos k_i)\right)\\
&=\text{const.}-\frac{N}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln\left(m^2+2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)\right)
\end{aligned}\tag{15.23}$$

もちろん N は，全格子点数である．式(15.23)が格子場における，結合した Ouroboros グラフを表すことは明らかである．

n 個のループの集合体の総和を計算する場合には，各ループを識別できないので，$n!$ による除算が必要である．したがって，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}&=(\text{const.})\exp\left(-\frac{N}{2}\iint_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln\left(m^2+2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)\right)\right)\\
&=\det{}^{-1/2}(-\nabla^2+m^2)
\end{aligned}\tag{15.24}$$

となる．∇^2 は格子場のラプラシアンである．これは Gauss 積分を実行して得られる式と全く同じ形になっている．

15.3 相互作用と Bose 凝縮

我々は，自由スカラー場の理論――汎関数積分が純粋に Gauss 積分となる理論――が，相互作用のない世界線の“気体”として解釈できることを見てきた (物理的

なモデルとしては，相互作用のない高分子気体のようなものになるであろう)．次にGauss積分に帰着しない $\lambda\varphi^4$ のような相互作用項を，作用に導入してみる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi]\, e^{\left\{-\sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^{d} a^d \left[\frac{1}{2}\frac{(\varphi(\mathbf{n}+\mathbf{i})-\varphi(\mathbf{n}))^2}{a^2} + \frac{1}{2}m^2\varphi(\mathbf{n}) + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(\mathbf{n})\right]\right\}} \tag{15.25}$$

こうすると，m が大きいときの展開において，$\lambda\varphi^4$ 項を，線が交差する点で使うことができる．これは (指数の和の外にあるマイナス符号のために) 交差が生じるときに，ループの総和に対する寄与を減じる効果を持つ．言い替えると，そのような相互作用項は，ループ間とループ内の別の部分の間に短距離の反発をもたらす．このタイプの相互作用は，実際に高分子溶液における短距離斥力の効果を調べるモデルとしても用いられるものである．

仮に $\lambda < 0$ とおくと，φ が大きいところで積分は発散する．これは高分子間の相互作用が引力であることにあたる．この力は飽和せず，近接領域の n 歩径路の間で，単位長さあたりの作用は，何らかの α，β を用いた，

$$S \approx \alpha n - \beta\lambda n^2 \tag{15.26}$$

という式に比例する (因子 n^2 は，相互作用をする線の対が $n(n-1)/2$ 組あることによる)．これは基本的に，連続場において n 粒子束縛状態の質量が次のように表されるのと同様のことである．

$$M \approx mn - K\lambda n^2 \tag{15.27}$$

このような束縛状態は，n が大きいと“タキオン的”(質量の自乗が負) になる．こうなると真空は，世界線がもつれた雑然とした状態になる．要素間の実効的な力が引力であれば，高分子は溶液から析出する．

$\lambda > 0$ で $m^2 < 0$ の場合でも，自発的な対称性の破れが生じて，同様の描像が成り立つ．$m^2 < 0$ は，

$$2de^{-\mu} > 1 \tag{15.28}$$

を意味する．超立方格子における酔歩のそれぞれのステップにおいて，$2d$ 通りの方向が選択できる．式(15.28)の条件が満たされるとき，$e^{-\mu}$ の因子が長い径路を完全に抑制することはない．言い替えると，各ステップでの $-\ln 2d$ の配位エントロピー (configurational entropy) の効果が，ステップ毎のエネルギー代償 μ の効果を上回ることになる．ここでも真空は，長い径路がもつれ合った“スパゲッティ”で満たされる．この“スパゲッティ相”は，世界線の描像におけるBose凝縮である．

15.3.1 回転不変性

格子系は回転不変性を破っている．このことは m^2 が大きいときの，2 点関数の回転不変性の欠如に反映される．m^2 が小さくなると，どのように回転不変性が回復するのだろうか？ 2 次元の場合について，詳細を見てみることにしよう．

$$G(\mathbf{n}, m^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}}{m^2 + 2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)} \tag{15.29}$$

$\mathbf{n}$ が，単位ベクトル $\mathbf{e}$ で指定される方向に大きくなると仮定する．

$$\mathbf{n} = r\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^2 = 1 \tag{15.30}$$

G は $|r|$ が大きくなると，指数関数的に減衰するものと考える．

$$G(r\mathbf{e}, m^2) \approx e^{-\kappa(\mathbf{e})|r|} \tag{15.31}$$

問題は $\mathbf{e}$ 方向の相関長の逆数 $\kappa(\mathbf{e})$ を計算することである．

κ は m^2 が大きいときには異方的だが，m^2 が小さくなると等方的になると予想される．

関数 f を次のように定義する．

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dr\, e^{-ir\xi} G(r\mathbf{e}, m^2) \tag{15.32}$$

この関数は ξ の実軸近傍で解析的でなければならず，r が大きいときの $G(r\mathbf{e}, m^2)$ の漸近的な振舞いは，ξ の実軸に最も近い特異点によって決まる．この特異点は，G が振動しないならば虚軸上にあるであろう．たとえば $\xi = i\zeta_0$ に特異点があれば $G \propto e^{-\zeta_0 r}$ となる．これは次の関係に依る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ir\xi} \frac{1}{\xi - i\zeta_0} \frac{d\xi}{2\pi i} = e^{-\zeta_0 r} \quad \text{for} \quad r > 0 \tag{15.33}$$

f は，次のように表される．

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} - \xi)}{m^2 + 2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos k_i)} \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} - \xi)}{D(\mathbf{k})} \end{aligned} \tag{15.34}$$

m^2 が小さければ，分母の $D(\mathbf{k})$ がゼロとなる，積分路を挟み込む 2 つの特異点によって特異性が生じる．これは連続場において，

$$f(i\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2 + m^2 - \zeta^2} \tag{15.35}$$

の被積分関数が $k = \pm i\sqrt{m^2 - \zeta^2}$ に極を持ち，これらが $\zeta = m$ のときに実軸を締めつけるのと同様である．この特異性によって伝播関数は $e^{-m|r|}$ のように減衰する．

締めつけの位置を見いだすために，$\mathbf{k} = i\mathbf{K}$ と置いて k の積分路を実軸から外してみる（k の積分が $k = \pm\pi$ に端を持っていても，締めつけの位置には関係がない）．$\xi = i\zeta_0$ において締めつけがあるものとすると，次式が与えられる．

$$D(\mathbf{K}) = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \mathbf{K}} = 0, \quad \text{on} \quad \mathbf{K}\cdot\mathbf{e} = \zeta_0 \tag{15.36}$$

この制約を課するために，Lagrangeの未定係数法を用いることができる．

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}\big\{D(\mathbf{k}) - \lambda\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}\big\} = 0 \tag{15.37}$$

これらの式は，単純な幾何的解釈が可能である．$\mathbf{K}\cdot\mathbf{e} = \zeta_0$ を満たす一連の点は，$\mathbf{e}$ に垂直で，原点からの距離が ζ_0 の直線上にある．式(15.36)は，$i\zeta_0$ に締めつけ特異性があれば，この直線が曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ の接線になることを意味する．より直接的にこれを見るためには，積分路 $\mathbf{K}\cdot\mathbf{e} = \zeta_0$ と $D(\mathbf{K}) = 0$ との交点が，複素 $\mathbf{k}$ 平面における被積分関数の極の位置になることに注目すればよい．締めつけが生じるのは，2 つの極が一致し，積分路が接線となるところである．

ここでは，

$$D(\mathbf{K}) = 4 + m^2 - 2(\cosh K_1 + \cosh K_2) \tag{15.38}$$

である．m^2 が大きければ，$D(\mathbf{K}) = 0$ の曲線は $\pm\cosh^{-1}(4 + m^2)/2$ に辺を持つ正方形になる．

簡単な幾何学的考察から，ζ_0 が次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\zeta_0 &\approx (\cos\theta + \sin\theta)\cosh^{-1}(4 + m^2)/2 \\ &\approx (\cos\theta + \sin\theta)\ln(4 + m^2)\end{aligned} \tag{15.39}$$

したがって m^2 が大きいときに，次の近似が成り立つ．

$$G\big(|r|\mathbf{e}, m^2\big) \approx e^{-|r|\zeta_0} = \frac{1}{(4 + m^2)^{|n_1| + |n_2|}} \tag{15.40}$$

これは驚くべき結果ではない．質量が大きければ，伝播関数に対する寄与は，0 と $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ の間の最短径路からのものが支配的になる．図を見ると分かるように，最短の長さは $|n_1| + |n_2|$ であり，この長さの径路は幾通りもある．

m^2 が大きくなければ曲線 $D(\mathbf{K}) = 0$ の角が丸みを帯び，m^2 が小さくなると，曲線全体が円形に近くなる．

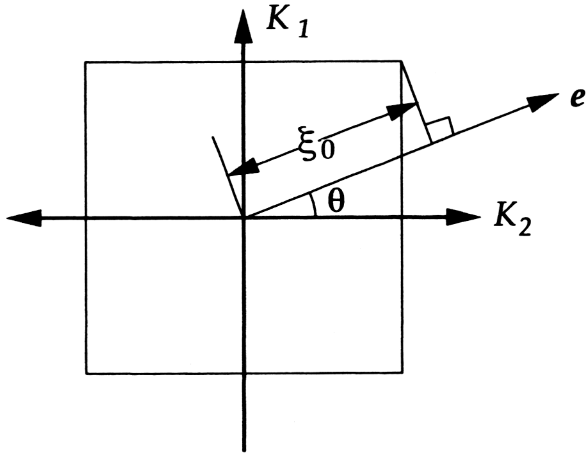


図 15.4　締めつけが生じる状況.

4 つの軸に沿った方向については，何れも，

$$\kappa = \zeta_0 = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right) \tag{15.41}$$

であり，また軸に対して 45° の方向については，

$$\kappa = \zeta_0 = \sqrt{2}\cosh^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}m^2\right) \tag{15.42}$$

となることが簡単に示せる．m^2 が小さくなると，両者はともに m に等しくなる．

連続極限

ここまでは，$a = 1$，m は無次元，座標 n_i は整数として格子場を扱ってきた．しかし，たとえば，

$$\left\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2)\hat{\varphi}(\mathbf{n}_1)\right\rangle = e^{-m|\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1|} \tag{15.43}$$

という式を，

$$\left\langle \hat{\varphi}(\mathbf{n}_2)\hat{\varphi}(\mathbf{n}_1)\right\rangle = e^{-\frac{m}{a}|\mathbf{n}_2 a - \mathbf{n}_1 a|} \tag{15.44}$$

と書き直すことができる．連続極限をとるために $\mathbf{n}a = \mathbf{x}$，$m_{\mathrm{continuum}} = ma^{-1}$ と置き，$m_{\mathrm{continuum}}$ の値を一定に保ちながら，同時に $m \to 0$，$a \to 0$ とする．このような極限操作の後では $\mathbf{x}$ を連続変数と見なすことができる．m が小さいならば，回転不変性が回復しているので，この理論が元々は離散的な正方格子の上で定義されたという証拠は残らない．

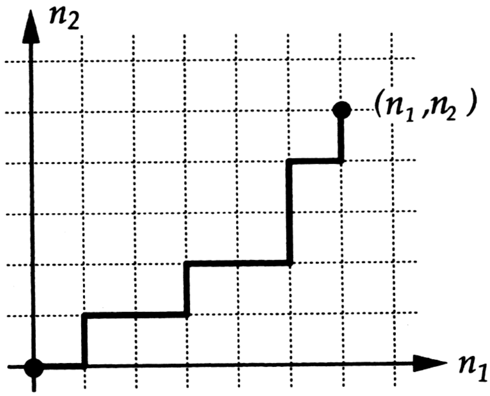


図 15.5　0 から (n_1, n_2) までの最短径路は，すべて $|n_1| + |n_2|$ の長さを持つ．

15.4 格子フェルミオン

我々はDiracのFermi粒子を格子上に載せる問題を扱うところに来た．これに関する方策は非常に技巧的なもので，今なお十分に納得のいく形で解決されていない問題も含んでいる．

連続的なDiracの作用，

$$S = \int d^d x \{ m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma^i \partial_i \psi \} \tag{15.45}$$

を離散化する最も明確な方法は，いわゆる“単純”作用 ('naive' action) をつくることである．

$$S = \sum_{\mathbf{n}} a^d \left\{ m\bar{\psi}(\mathbf{n})\psi(\mathbf{n}) + \frac{1}{2a}\bar{\psi}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i \big(\psi(\mathbf{n}+\mathbf{i}) - \psi(\mathbf{n}-\mathbf{i}) \big) \right\} \tag{15.46}$$

Bose粒子の場合と同様に，$a = 1$ と置き，ホッピングパラメーター K を導入して，場のスケールを変換する．

$$\psi_{\text{continuum}} = \sqrt{2K}\psi_{\text{lattice}}, \quad \text{and} \quad m = \frac{1}{2K} \tag{15.47}$$

この書き替えによって，作用は次のようになる．

$$S = \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \bar{\psi}(\mathbf{n})\psi(\mathbf{n}) + K\bar{\psi}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i \big(\psi(\mathbf{n}+\mathbf{i}) - \psi(\mathbf{n}-\mathbf{i}) \big) \right\} \tag{15.48}$$

Grassmann数 $\psi(\mathbf{n})$，$\bar{\psi}(\mathbf{n})$ について積分する時，ゼロでない結果を得るために，各々の格子点で因子 $\bar{\psi}\psi$ が必要である．これを達成するために，各々の格子点に $\bar{\psi}\psi$

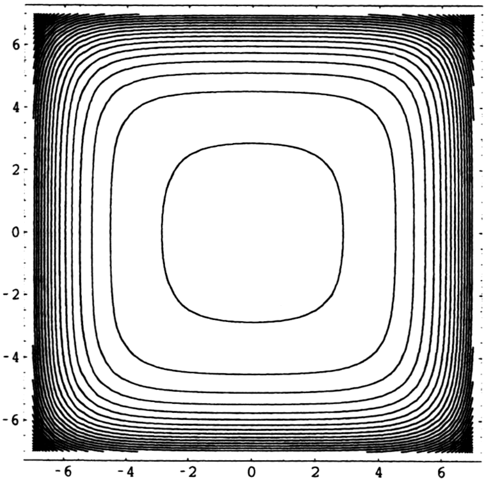
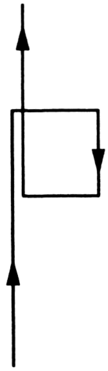


図 15.6　m^2 を変えたときの $D(\mathbf{K})=0$ の曲線.

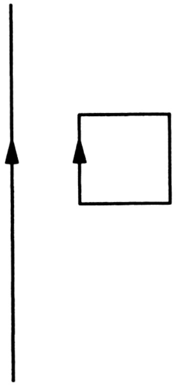
の質量項を用いてもよいし，隣接点へのホッピング項 $\bar{\psi}(\mathbf{n})\gamma^i\psi(\mathbf{n}+\mathbf{i})$ を導入してもよい．どの結合線も重複して用いないかぎり，この方法によって，次の形の径路展開を得ることができる．

$$\left\langle \psi(\mathbf{n}_2), \bar{\psi}(\mathbf{n}_1) \right\rangle = \sum_{\text{paths}} K^L \prod \gamma^i \tag{15.49}$$

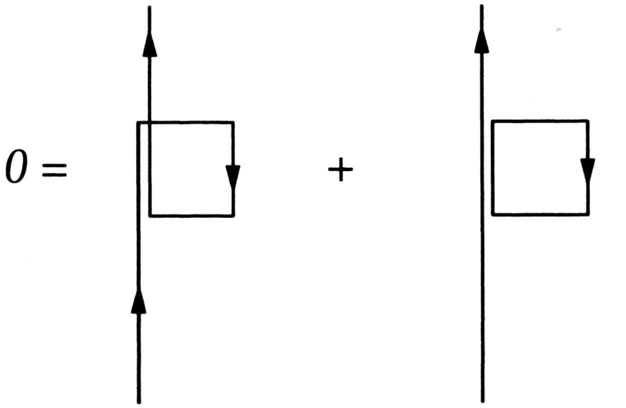
和は $\mathbf{n}_1$ から $\mathbf{n}_2$ に至るすべての径路について行う．L は想定する径路の長さである．$\prod \gamma^i$ は，径路に沿ったガンマ行列の積で，$-\mathbf{i}$ 方向のステップが因子 $-\gamma^i$ を伴うものとする．一見，径路を自分自身に重ならないものに限定しないと，Grassmann数の $\psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0$ の条件から支障が生じるように思えるかも知れないが，実はそうではない．伝播関数に寄与するグラフと，真空ダイヤグラムに寄与する閉じたループのグラフの競合効果のために，和の対象となる径路に制約を課す必要はなくなる．これがどのように起こるかを見るために，単純な例を調べてみよう．



2つの線が同じ結合線を通ることは，展開において禁じられる．しかし伝播関数が単純に直進し，真空ループを伴っている，次のようなダイヤグラムも考える．



ここでもループを伝播関数の線と接触させることは禁じられる．しかし閉じたループは，フェルミ粒子の閉じたループの常として，伝播関数に対して負の符号を持つ．したがって，これらの禁じられたダイヤグラムを両方加えてしまっても，結果に違いは生じない．



一般的にこのような競合効果が働くことは，作用を運動量空間において対角化することによって，簡単に理解することができる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\bar{\psi}]d[\psi] \exp\left\{\sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}\right\} = \prod_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} \tag{15.50}$$

$$\langle \psi_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d[\bar{\psi}]d[\psi] \psi_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \exp\left\{\sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}\right\} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{k}}} \tag{15.51}$$

真空の積分と他の項の相殺の結果，伝播関数が指数に現れる行列の逆行列となることが分かる．Bose粒子の酔歩の場合と同様の方法を用いて，式(15.49)の和が正しい伝播関数を与えることを確認できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{paths}} K^L \prod \gamma^i &= \sum_L \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \left(\sum_{\mathbf{i}} \gamma^i 2iK \sin k_i\right)^L \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{1}{1 - \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i 2iK \sin k_i} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \frac{1 + \sum_{\mathbf{i}} \gamma^i 2iK \sin k_i}{1 + \sum_{\mathbf{i}} 4K^2 \sin^2 k_i}
\end{aligned} \tag{15.52}$$

$m = (2K)^{-1}$ と置き，格子場 ψ が $\psi_{\text{continuum}} = \sqrt{2K}\psi_{\text{lattice}}$ のように連続場に関係づけられることを思い出すと，上式は $\mathbf{k}$ が小さいときに，連続場の伝播関数に似ていることが見てとれる．

$$\langle \psi(\mathbf{x}) \bar{\psi}(\mathbf{y}) \rangle = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{m + i\not{k}}{m^2 + k^2} \tag{15.53}$$

しかし，ここには問題が潜んでいる．次の式，

$$\left\langle\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}(1)}{1+\sum_{\mathbf{i}}4K^2\sin^2 k_i} \tag{15.54}$$

を $m = 1/2K \;\to\; 0$ の下で評価しようとするときに問題が現れる．容易に予想されるように，$\mathbf{k}=0$ 近傍の $\sin k \approx k$ が小さいところで，積分への寄与は大きくなる．しかし都合の悪いことに $\sin\pi = 0$ でもあるので，$\mathbf{k}$ が $\pm\pi$ に近いところでも，同様の寄与が現れる．d 次元系では，そのような点が Brillouin 領域内に 2^d 個ある．それらすべてが積分に対して同じ寄与を持つ．

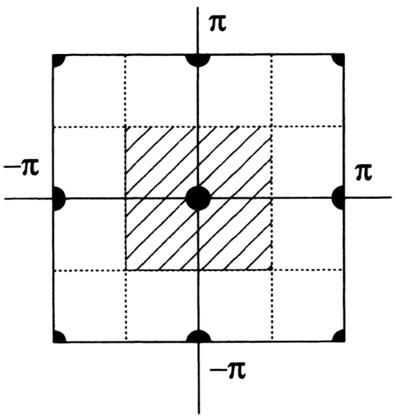


図 15.7　分割された 3 つの黒点を含む，分割された 3 つの正方形領域が，斜線のある正方形領域と同じ寄与を $\left\langle\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\psi_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle$ に対して持つ．

したがって，正確な連続場の式の 2^d 倍に相当する結果が出てきてしまう．すなわち，ひとつの“種類”(species) の Fermi 粒子から始めたはずの話が，あたかも“2^d 種類の粒子”の話のようになってしまっている．別の物理量の計算をするときにも，同様の問題が起こる．これが悪名高い“Fermi 粒子の重複問題”(fermion doubling problem) である．

Fermi 粒子の重複問題を回避するために，いろいろなアプローチが試みられた．最も有名な方法は“Wilson フェルミオン”および“Kogut-Susskind フェルミオン”(もしくは ‘staggered fermion’) の方法である．

Wilsonフェルミオン

ホッピング項の因子 $\pm\gamma^\mu$ を投射演算子 $(1\pm\gamma^\mu)$ に置き換える．そうすると，

$$G=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,e^{-i\mathbf{k}\cot\mathbf{n}}\frac{1+2iK\sum_\mu\gamma_\mu\sin k_\mu+2K\sum_\mu\cos k_\mu}{(1-2\sum_\mu\cos k_\mu)^2+4K^2\sum_\mu\sin k_\mu} \tag{15.55}$$

となる．この伝播関数では，分母が $\mathbf{k}=0$ 付近だけで小さくなり，1種類のFermi粒子だけを生じる．しかし残念ながら因子 $(1+\gamma)$ は，“単純作用”の $K\to -K$ 対称性を破り，Wilsonフェルミオンは $K=0$ のときに，質量がゼロではなくなる．この結果，相互作用が導入されると，Fermi粒子を軽くするような K の値を置くことが難しくなり，連続極限を考えることが困難になる．

Kogut-Susskindフェルミオン

この方法は重複問題を部分的に解決するに過ぎないが，これによって興味深い幾何的解釈が可能になる．

まず初めに，作用をスピン空間で対角化する．これを行うために，4次元において，

$$\psi_{\text{naive}}(n_1,\ldots,n_4)=\gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1}\psi_{\text{K-S}}(n_1,\ldots,n_4) \tag{15.56}$$

と置く．作用は次のようになる (場の添字 K-S を省く)．

$$S=\sum_{\mathbf{n},\mathbf{i}}\Big\{\bar\psi(\mathbf{n})\psi(\mathbf{n})+(-1)^{\phi(\mathbf{i},\mathbf{n})}\bar\psi(\mathbf{n})\big\{\psi(\mathbf{n}+\mathbf{i})-\psi(\mathbf{n}-\mathbf{i})\big\}\Big\} \tag{15.57}$$

位相 $(-1)^{\phi(\mathbf{i},\mathbf{n})}$ は，γ の相互の置換によって生じる．たとえば，

$$\begin{aligned}
&\bar\psi(\mathbf{n})\gamma_1\big(\psi(\mathbf{n}+1)-\psi(\mathbf{n}-1)\big)\\
&\quad\to\bar\psi(\mathbf{n})\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\gamma_3^{n_3}\gamma_4^{n_4}\gamma_1\\
&\qquad\quad\times\big(\gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1+1}\psi(\mathbf{n}+1)-\gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1-1}\psi(\mathbf{n}-1)\big)\\
&\quad=(-1)^{n_2+n_3+n_4}\bar\psi(\mathbf{n})\gamma_1\big(\psi(\mathbf{n}+1)-\psi(\mathbf{n}-1)\big)
\end{aligned} \tag{15.58}$$

である．同様にして，次のようになる．

$$\begin{aligned}
\phi(2,\mathbf{n})&=n_3+n_4\\
\phi(3,\mathbf{n})&=n_3\\
\phi(4,\mathbf{n})&=0
\end{aligned} \tag{15.59}$$

あと，γ の代数に関して残っている事実は，

$$\prod_{\text{plaquette}} (-1)^{\phi} = -1 \tag{15.60}$$

ということだけである．これは $\mu \neq \nu$ のときに $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = -1$ に一致する．作用はスピン成分について対角化されているので，4 つのスピンのラベルのうち，ひとつだけを残して，Fermi 粒子数 (4 次元の) を 16 から 4 に減らすことができる．

Kogut-Susskind フェルミオンは，“ Kahler-Dirac フェルミオン ” の格子版である．これは Dirac によって用いられた，ラプラシアンの平方根を採用した 1 次の微分方程式に従う．d が微分形式(反対称な共変テンソル) の上に作用する外微分であり，δ がその共役であるならば $-\nabla^2 = (d+\delta)^2$ であり，$D = d+\delta$ を Dirac 方程式の代わりに用いることができる．この演算子はスピノルの代わりに，異なる次数の微分形式全体に作用する．4 次元では反対称テンソルの 16 の独立な成分があり，Kahler-Dirac フェルミオンは 4 つの Dirac フェルミオン一式のように見える．しかしこれらは厳密に等価ではなく，重力場との相互作用が異なる．

15.4.1 カイラル格子フェルミオンの欠如

現実の世界には“ カイラルフェルミオン ” が存在する．ニュートリノは左手型で，反ニュートリノは右手型である．右手型のニュートリノが存在していても，それは弱い相互作用に関与せず，我々がその存在を検知することはできない．Nielsen と Ninomiya によって提唱され，Friedan によって拡張された定理によると，Dirac 方程式を周期格子上へ離散化した場合，そのようなカイラルフェルミオンを表すことができなくなる．これらの研究者の位相学的な議論によれば，伝播関数において Brillouin 領域内のある点にカイラルフェルミオンの極を作ったとしても，必ず反対のカイラリティーを持ったフェルミオンの点がもうひとつ現れる．その上，ゲージ不変性の要請から，両者のカイラリティーは同じように任意のゲージ場に結合しなければならない．このような事情が弱い相互作用の数値計算にもたらす現実的な困難はさて措いて，神学的な慰安を見いだすならば，我々の宇宙はスーパーコンピューター上のシミュレーションとは違うので，研究助成金の満了のために計算が途中で打ち切られるような心配はない．

第 16 章　繰り込み群

相対論的な場の理論における繰り込み群 (renormalization group) は，Stückleberg および Gell-Mann と Low によって独立に発見された．後に Leo Kadanoff は，場の理論における繰り込み群と似たものが，臨界現象における普遍性の起源となっていることを見いだした．そして Ken Wilson は，1970 年代初頭に出した一連の論文において，連続場の理論と格子統計力学の視点を融合し，繰り込み群を実際の計算に役立つ道具に仕立て上げた．Kadanoff と Wilson は，場の量子論に対する我々の姿勢を全面的に変えさせたと言えよう．彼らの仕事以前には，場の理論は摂動展開を書き下す Feynman 規則と，発散する Feynman 積分から有限の答えを引き出すための繰り込み処方だけから構成されており，摂動論の適用範囲外にある場の理論について，明確な概念は存在していなかった．摂動級数は漸近展開になる場合もあるが，一意的な結果を与えるとは限らないため，非摂動的な効果に対して，どのような計算方法が正当なのかという問題に関する統一的な考え方はなかった．同等の計算技術と誠意を持った研究者が，全く別々の結論に到達することも有り得たのである．しかし繰り込み群の概念が発達した今日では，そのような混乱は無くなった．

この章では，統計力学の文脈における繰り込み群を調べることにする．ここから引き出そうとしている教訓は，適正な理論において連続極限をとるためには，パラメーター空間において，相関長 (correlation length) が巨視的になる点を求めなければならないことである．これは連続的な相転移が起こる“臨界点”(critical point) にあたる．そのような点に照準を合わせて，相関関数が有限に留まるように，場のスケールを変更することができる．連続的な相転移には“普遍性”(universality) があるので，結果として得られる連続な理論は，それを導くために用いた手続きの詳細には依存しない．

16.1　伝送行列

連続的な相転移を示す最も単純なモデルのひとつは，強磁性体の Ising 模型である．この模型における自由度は，古典的な多数のスピン σ の形で与えられており，

それぞれが上向きスピン (↑) に対応する $\sigma = 1$ と，下向きスピン (↓) に対応する $\sigma = -1$ の 2 種類の値をとり得る．

1 次元Ising模型の分配関数は，次のように与えられる．

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma_i=\pm1} \exp\left\{ J \sum_i \sigma_i \sigma_{i-1} - h \sum_i \sigma_i \right\} \tag{16.1}$$

和は，スピン σ_i を配置した直線全体にわたって実施する．

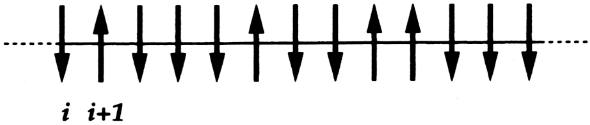


図 16.1　典型的なスピンの配置.

J は，スピン間の結合の強さを調節する正のパラメーターである．J が大きいと (すなわち低温においては)，各スピンが方向をそろえる傾向を持つ．J が小さいと，スピンが乱雑になる．

分配関数は，次のようにも書ける．

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma_i} \prod_i (\cosh J + \sigma_i \sigma_{i-1} \sinh J)\, e^{\frac{h}{2}\sigma_i} e^{\frac{h}{2}\sigma_{i-1}} \tag{16.2}$$

上式によって，次のように定義される " 伝送行列 " (transfer matrix) $\langle \sigma | T | \sigma' \rangle$ の導入が促される．

$$T = \begin{bmatrix} e^{J-h} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J+h} \end{bmatrix} = e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} \left(e^J + \hat{\sigma}_x e^{-J} \right) e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} \tag{16.3}$$

$\hat{\sigma}_{x,z}$ は Pauliの σ 行列で，これらは通常通り，2 次元の Hilbert空間に作用する．$\hat{\sigma}_z$ の固有状態を $|\sigma\rangle$ と記すことにする．

$$\hat{\sigma}_z |\sigma\rangle = \sigma |\sigma\rangle, \quad \hat{\sigma}_x |\sigma\rangle = |-\sigma\rangle \tag{16.4}$$

伝送行列は，次のようにも書ける．

$$T = e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} e^{\Theta \hat{\sigma}_x} e^{-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z} \sqrt{2 \sinh 2J} \tag{16.5}$$

ここで，$\tanh \Theta = e^{-2J}$ である．

すべてのサイト (スピン配置点) のスピン値に関する和は，T の行列積の，繰り返された添字に関する総和として，新たに解釈することができる．N 個のスピン系の分配関数は，次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_i\}} \langle \sigma_N | T | \sigma_{N-1} \rangle \langle \sigma_{N-1} | T | \sigma_{N-2} \rangle \ldots \langle \sigma_1 | T | \sigma_0 \rangle \tag{16.6}$$

系の両端のスピン σ_N と σ_0 の扱い方は，境界条件に依存する．周期境界条件を採用するならば，$\sigma_N = \sigma_0$ と置いて，それらの総和を考えればよい．これはトレースをとることに対応する．

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\big(T^N\big) = \lambda_+^N + \lambda_-^N \tag{16.7}$$

$\lambda_\pm$ は T の 2 つの固有値である．

$$\lambda_\pm = e^J \Big(\cosh h \pm \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J} \Big) \tag{16.8}$$

熱力学的な極限 $N \to \infty$ に近づくと，大きい方の固有値 λ_+ が支配的になる．次のように定義される自由エネルギー F を考える．

$$\mathcal{Z} = e^{-NF} \tag{16.9}$$

小さい方の固有値を無視すると，この自由エネルギーは次のように書ける．

$$\begin{aligned} F &= -J - \ln\Big(\cosh h + \sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J} \Big) \\ &= -J - \cosh^{-1}\left(\frac{\cosh h}{\sqrt{2}\, e^{-J} \sinh 2J} \right) \end{aligned} \tag{16.10}$$

F を用いて，この系の巨視的な性質を見いだすことができる．たとえば磁化 $M(J, h)$ は，次のように与えられる．

$$M(J,h) = \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\sigma} \sigma_i \, e^{-H} = -\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\sinh h}{\sqrt{\cosh^2 h - 2e^{-2J} \sinh 2J}} \tag{16.11}$$

すべてのサイトは等価なので，i として任意のサイト番号を選んでよい．この 1 次元模型では，有限の J の下で自発的な磁化は生じない．すなわち M は h に対して連続な関数である．$J = \infty$，すなわち絶対零度の場合にだけ，$\langle \sigma \rangle$ の鋭い変化を見ることができる．このときには，2 通りのスピン配置だけが寄与を持つ．ひとつは，すべてのスピンが上向きで，エネルギーが Nh の場合であり，もうひとつは，すべてのスピンが下向きで，エネルギーが $-Nh$ の場合である．したがって，N が大きくなると，

$$\langle \sigma \rangle = \tanh Nh \ \to \ \mathrm{sgn}\, h \tag{16.12}$$

となる．

ここまでは，周期境界条件だけを考えてきた．別の境界条件として，たとえば左端サイトを上向きスピン，右端サイトを下向きスピンに固定すると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \langle \uparrow | T^N | \downarrow \rangle \\
&= \langle \uparrow | + \rangle \lambda_+^N \langle + | \downarrow \rangle + \langle \uparrow | - \rangle \lambda_-^N \langle - | \downarrow \rangle \\
&= \sum_{\pm} \varphi_\pm^*(\uparrow) \varphi_\pm(\downarrow)\, e^{-N(-\ln \lambda_\pm)}
\end{aligned}
\tag{16.13}
$$

上式はエネルギー固有値が $-\ln \lambda_\pm$ の，2 準位量子力学系における伝播関数を思い起こさせる．伝送行列は $e^{-\hat{H}}$ の役割を担う．ここではハミルトニアン演算子と Hilbert 空間の方法が，スピン配置に関する和を調べる道具となる——径路積分による量子力学において，配置に関する和 (径路積分) がハミルトニアンを調べる道具となるのとは反対である．

スピン－スピン相関関数 (境界条件は任意とする)，

$$
\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_{i-m} e^{-H} \tag{16.14}
$$

は，次のように表される．

$$
\frac{\langle \sigma_N | T_N T_{N-1} \ldots T_i \hat{\sigma}_z T_{i-1} \ldots \hat{\sigma}_z T_{i-m-1} \ldots T_0 | \sigma_0 \rangle}{\langle \sigma_N | T^N | \sigma_0 \rangle} \tag{16.15}
$$

ここで“Heisenberg演算子”を $\hat{\sigma}_z(i) = T^{-i} \hat{\sigma}_z T^i$ と定義すると，Gell-Mann Low の定理を用いて，相関関数を基底状態に関する期待値として書くことができる．

$$
\langle + | T \{ \hat{\sigma}_z(i) \hat{\sigma}_z(i-m) \} | + \rangle \tag{16.16}
$$

ここでの“時間”順序化積 T は，大きなサイト番号の演算子が左側にくるようにした積を表す．もちろん N が大きくなると，どのような状態 $|\sigma\rangle$ を端に選んでも，次のようになる．

$$
|+\rangle \propto T^N |\sigma\rangle \tag{16.17}
$$

$h = 0$ ならば，これを正確に評価することができる．次の関係，

$$
\langle \sigma | T | \sigma' \rangle = \cosh J + \sigma \sigma' \sinh J \tag{16.18}
$$

$$
\sum_{\pm 1} \sigma = 0, \quad \sum_{\pm 1} \sigma^2 = 2 \tag{16.19}
$$

を用いると，相関関数は次のように与えられる．

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = \frac{(2\cosh J)^{n-|m|}(2\sinh J)^{|m|}}{(2\cosh J)^N} = (\tanh J)^{|m|} \tag{16.20}$$

したがって，相関は指数関数的に減衰する．

$$\langle \sigma_i \sigma_{i-m} \rangle = e^{-|i-j|/\xi} \tag{16.21}$$

ここで $\xi^{-1} = -\ln\tanh J$ である ($0 < \tanh J < 1$ なので，正の値になる)．ξ は相関長 (correlation length) と呼ばれる．

16.1.1 連続極限

$\sigma = \pm 1$ なので，スピンの配置場自体を滑らかな連続場と見なすことはできない．しかし“相関関数”については，滑らかな連続極限——すなわち系の離散性が目立たなくなるような極限を想定できる．これは相関関数がサイト間隔に比べて十分長距離に及ぶようにパラメーターを設定することによって実現できる．1 次元の Ising 模型では，

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = e^{-|i-j|(-\ln\tanh J)} \tag{16.22}$$

となる．サイト間隔 a を用いて $x = ja$ と置くと，2 点関数を次のように書ける．

$$\left\langle \sigma(x)\sigma(x') \right\rangle = e^{-|x-x'|m} \tag{16.23}$$

ここで“質量”m は，次式で与えられる．

$$m = -\frac{1}{a}\ln\tanh J \tag{16.24}$$

我々は“連続極限”を，m を一定に保ちながら $a \to 0$，$J \to \infty$ を行う操作と定義する．この極限操作を行った後には，x を連続変数と見なすことができる．その上，相関を J ではなく m によって決めてしまえば，連続極限の表式は J や a にあらわに依存しなくなる．J が微小な長さ a によって定義された切断と関係する“裸の”パラメーターであるのに対し，m は“繰り込まれた”(renormalized) 量と見なすことができる．

m を変えないように J と a を同時に変化させてみよう．J が大きいならば，

$$ma \approx 2e^{-2J} \tag{16.25}$$

であり，J と a の関係を，

$$a\frac{\partial J}{\partial a} = -2 \tag{16.26}$$

とするならば，J と a の変化は連続極限に影響しない．このことは，温度 $T = J^{-1}$ を導入することで，より適切に表現できる．

$$a\frac{\partial T}{\partial a} = 2T^2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta(T) \tag{16.27}$$

ここで初めて“β関数”が現れたが，この関数は，繰り込み群の理論において中心的な関心の対象となるものである．式(16.27)は“繰り込み群方程式”(renormalization group equation) の一例である．

16.1.2　2次元Ising模型

1次元Ising模型は，有限温度において1種類の相しか持たない．Onsager[1]は2次元Ising模型の自由エネルギーを考察した．

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma_{\mathbf{n}}=\pm 1} \exp\left\{ J \sum_{\langle \mathbf{nm} \rangle} \sigma_{\mathbf{n}}\sigma_{\mathbf{m}} - h \sum_{\mathbf{n}} \sigma_{\mathbf{n}} \right\} \tag{16.28}$$

$\langle \mathbf{nm} \rangle$ は，隣接サイトの組み合わせを表す．彼はこの自由エネルギーが $J_{\text{crit}} = -\frac{1}{2}$ $\ln(\sqrt{2}-1) \approx .4406$ において解析的でないことを示した．これは臨界点である．J を小さい方から徐々に増やして J_{crit} に近づけると，相関長は発散し，$J > J_{\text{crit}}$ になると系は自発的に磁化する．$\langle \sigma \rangle$ を h の関数と見なすと，後者の場合，$h = 0$ において $+M$ から $-M$ への不連続な飛躍を持つようになるのである．これは $\sigma \to -\sigma$ の対称性が自発的に破れていることを表す．Onsagerは後に，磁化 $M(J)$ が臨界点近傍で，次のような非解析的な挙動を示すことを見いだした．

$$M(J) \propto (J - J_{\text{crit}})^{\beta} \tag{16.29}$$

指数 β は $\frac{1}{8}$ となる．

Onsagerの解法は，次の伝送行列から始まる．

$$T = e^{\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_z^{(i)}\hat{\sigma}_z^{(i-1)}} e^{\theta \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_x^{(i)}} e^{\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_z^{(i)}\hat{\sigma}_z^{(i-1)}} (2\sinh 2J)^{\frac{N}{2}} \tag{16.30}$$

---

[1] Lars Onsager：1903年11月27日 Kristiania (ノルウェー) 生まれ．1976年10月5日 Coral Gables (フロリダ州) にて死去．

$\tanh\theta = e^{-2J}$ である．これは N 個のスピンの列全体を，次の列へと結合する．したがって，関係する Hilbert空間は，

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{1}^{N} \mathcal{H}_2 \tag{16.31}$$

である．$\mathcal{H}_2$ は，個々の $\hat{\sigma}^{(i)}$ が作用する，スピン $\frac{1}{2}$ の空間である．中間状態 $|\sigma\rangle$ は，すべての $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ の同時固有状態である．

$$\hat{\sigma}_z^{(i)}|\sigma\rangle = \sigma_i|\sigma\rangle \tag{16.32}$$

σ_i は，着目している列の i 番目のスピン値である．

Onsagerの解の詳細には立ち入らず (これは 2 次元の自由Majoranaフェルミオン系の考察に役立つ)，繰り込み過程に関する問題だけを見ることにする．

結合係数 J が $J_{\rm crit}$ に近づくとき，$J_{\rm crit}$ の上下どちら側でも，スピンの相関長は $\xi \propto |J - J_{\rm crit}|^{-\nu}$，$\nu = 1$ のように発散する．相関長が十分に伸びると，長距離のスピン－スピン相関は回転対称になる．

$$\langle\sigma_{\mathbf{n}}\sigma_{\mathbf{m}}\rangle \propto e^{-|\mathbf{n}-\mathbf{m}|/\xi} \tag{16.33}$$

$|\mathbf{m}-\mathbf{n}| = \sqrt{(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2}$ は 2 点間の Euclid距離である．同様の性質が任意の n 点関数においても見られる．したがって，この Ising模型は $J_{\rm crit}$ のところで連続極限となる．これは一般的な原理である．

$$\big[\text{連続極限 (continuum limit)}\big] = \big[\text{臨界点 (critical point)}\big]$$

16.2 スピンのブロック化と繰り込み群

繰り込みと，繰り込み群の概念を導く最良の方法は，2 次元Ising模型におけるスピン配置の考察によって与えられる．

図 16.2 は臨界温度 $T_{\rm c}$ における典型的なスピンの分布状態である．臨界温度の近傍におけるスピンの分布も，これとよく似た状態である．正確に臨界温度にある状態と，その近傍の状態を，どのように区別するのだろうか？

個々のスピンがそれぞれ任意の値 (±1) を持つ状態から，スピン 9 個の区域をブロックとしてまとめるような変更を考えよう．各ブロック内ではスピンが多数方向に揃い，全スピンが上向き，もしくは全スピンが下向きになることだけが許されるものとする．

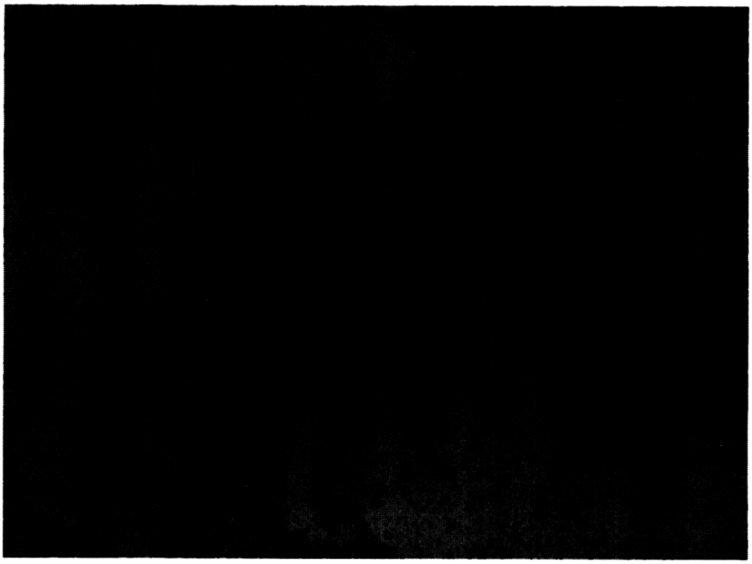


図 16.2 $T = T_{\mathrm{c}}$ におけるスピン分布の様子.

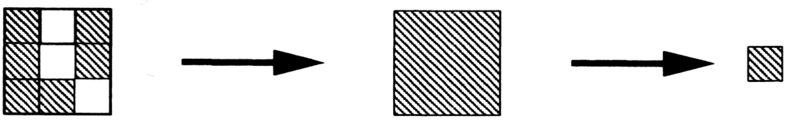


図 16.3 ブロック内のスピンが下向きに揃う例 ($s = 1 \equiv \uparrow$ を白いセルで表す).

各ブロックのスピンの上下が決まった後に，それぞれのブロックを，最初にスピンひとつあたりに与えられていた面積まで縮小することにする．こうすると，元のスピン系と，新しいブロック系の状態を，直接比較することができる．

このブロック化の過程を繰り返すと，$T > T_{\mathrm{c}}$ の系は完全にスピンの乱れた状態へ移行してゆくが，$T < T_{\mathrm{c}}$ の系は，全スピンが揃った，上向きだけ，もしくは下向きだけの状態になっていく．しかし，ちょうど臨界点におけるスピン分布の様子は，ブロック化を繰り返しても変わることがない．臨界点でのスピン分布は，スケール不変なフラクタル (fractal) になっているのである．

ブロック化の過程を定式化することができる．多スピン系の分布状態 $\{\sigma\}$ に関する分配関数を，

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-H(\{\sigma\})} \tag{16.34}$$

と置く．分布 $\{\sigma\}$ が実現する確率分布は次式で与えられる．

$$P(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-H(\{\sigma\})} \tag{16.35}$$

一般的な“ブロックスピン”(block spin) の概念を定義することによって，系の“粗視化”(coarse graining) の問題を扱うことにする．まず条件付き確率 $P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big)$ を導入する．これは元のスピン分布 $\{\sigma\}$ を与えたときに，ブロックスピンの分布が $\{\sigma'\}$ となる確率である．

たとえば，先ほど示した 3×3 のブロックがスピンを確定する過程では，

$$P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big) = \prod_I \delta\Big(\sigma'_I - \mathrm{sgn} \sum_{i \in I} (\sigma_i)\Big) \tag{16.36}$$

と書ける．I はスピン 9 個から作られる新しいブロックの番号である．この場合，ブロックスピンは元のスピンから確定的に決まる関数である．$P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big)$ は確率なので，次の条件が課せられる．

$$\sum_{\{\sigma'\}} P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big) = 1 \tag{16.37}$$

この $P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big)$ を使って，分配関数を次のように書く．

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma'\}} \sum_{\{\sigma\}} P\big(\{\sigma'\}|\{\sigma\}\big)\, e^{-H(\{\sigma\})} = \sum_{\{\sigma'\}} e^{-H'(\{\sigma\})+G} \tag{16.38}$$

[H' に関して $\sum_{\sigma'} H'(\sigma') = 0$ もしくはこれに類する条件を課して，指数の H' と G の分割の仕方を決めなければならない.]

新しいハミルトニアン H' をつくることによって，前と同じ形の分配関数 (定数 G の違いを考慮すれば) が与えられる．その上，元のブロックスピンの局所関数として新しいブロック関数を定義する方法 (3×3 のブロック内でスピンを決めたように) は，この模型における長距離の物理をすべて保持する．ブロック化の過程は，スピン系に対する“ぼかし”(blurring)，すなわち解像度の低下と見ることができる．これは 16.1.1 節で導入した“物理を変えずに切断 (cut-off) を変更する操作”と等価である．ハミルトニアンの変更は，式(16.27) で定義されている β 関数を離散化したものに相当する．

ブロック化の後で，系を R^{-1} 倍に縮小し (上記のブロック化では $\frac{1}{3}$ 倍)，各々のブロックスピンが，元のひとつのスピンと同じ空間を占めるようにスケールを変更すると都合がよい．この過程を繰り返すと，

$$H(\sigma) \xrightarrow{P} H'(\sigma') \xrightarrow{P} H''(\sigma'') \to \dots \tag{16.39}$$

のように，離散的な繰り込み群の流れが与えられる[2)].

あるハミルトニアン H^* が，

$$H^* \to H^* \tag{16.40}$$

を満たすものと考えよう．このような H^* は，繰り込み群変換の“固定点”(fixed point) にあると言う．

固定点の物理的な重要性は，繰り込みの下で隣り合うハミルトニアンの振舞いに依存する．H^* 付近のハミルトニアンを見てみよう．

$$H = H^* + \sum_i a_i O^i \tag{16.41}$$

O^i は演算子一式，すなわち付加的な相互作用を表す．繰り込み群の流れを，

$$H \to H^* + \sum_i a'_i O^i \tag{16.42}$$

とおくと，次のように，演算子の流れを係数変換に置き換えることができる．

$$a_i \xrightarrow{P} a'_i \tag{16.43}$$

この流れは H^* の近くでは線形で $a_i \to a'_i = A_{ij}a_j + O(a^2)$ とならなければならない．A_{ij} が元々対称であると仮定する理由はないが，特殊な場合を除けば対角化が可能である．よって A_{ij} が対角化されて Λ_i と表されるように O^i を選ぶことができる．そうすると，係数の流れを，

$$a_i \xrightarrow{P} \Lambda_i a_i \xrightarrow{P} \Lambda_i^2 a_i \xrightarrow{P} \dots \tag{16.44}$$

のように書ける (ここでは i が重複していても和をとらない).

$|\Lambda_i| < 1$ ならば，繰り込み群の流れの下で O^i の係数は減少する．このような O^i を (赤外で)“無効 (irrelevant) な摂動”と呼ぶ．反対に $|\Lambda_i| > 1$ ならば O^i の係数は増加するので，O^i を H^* に対して“有効 (relevant) な摂動”と呼ぶ．$|\Lambda_i| = 1$ の場合は O^i を“境界的 (marginal) な摂動”と呼ぶ[†]．H^* が質量のない自由場のハミルトニアンならば，これらの術語はそれぞれ“繰り込み不可能 (nonrenormalizable) な摂動”，“超繰り込み可能 (superrenormalizable) な摂動”，“繰り込み可能 (renormalizable)

[2)] 繰り込み“群”という術語を使うのが通例となっているが，この呼称は，ブロック化操作の“冪”が，操作の繰り返しとして与えられることを強調するために採用されたものである．しかしブロック化の過程は非可逆なので，繰り込み群は本当は“群”ではなく，“半群”(semigroup) であるにすぎない．

[†] (訳註) relevant, irrelevant, marginal の訳語は文献によって異なる．relevant には“有用な”，“意義のある”，irrelevant には“無用な”，“非有効な”，“意義のない”，marginal には“中立的な”などの訳語もある．

な摂動”といった術語と等価である[‡]．有効な演算子は，臨界点への接近を妨げる．温度，質量，磁場などの項が，有効な演算子に相当する．多くの単純な演算子の固有ベクトルは，繰り込み群の流れの方向と一致しないことに注意されたい．それらは何らかの対称性の要請によって妨げられない限り，互いに混合する．

相関長

P を施すたびに，系は $\dfrac{1}{3}$ 倍 (もしくはブロック化寸法が R なら R^{-1} 倍) に縮小するので，相関長も，

$$\xi \xrightarrow{P} \frac{1}{3}\xi \tag{16.45}$$

のように変換する．固定点では (H が変わらないために) ξ が変わらなくなるはずなので，固定点における ξ は 0 もしくは ∞ である．後者の場合が興味深い．これは統計力学の問題，もしくは質量のない場の理論における臨界点を表す．

ハミルトニアンを，

$$H = H^* + aO \tag{16.46}$$

とし，O を有効な摂動と考える．$a \xrightarrow{P} \Lambda a$，$\Lambda = R^y$，$y > 0$ である．そうすると ξ は a の変化に伴って，

$$\xi = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{y} \tag{16.47}$$

のように変化する．このことを確認するために，$a = a_0$，$\xi = \xi_0$ からの流れを見てみよう．繰り込み群の N ステップの流れの後に，$a = R^{Ny}a_0$，$\xi = R^{-N}\xi_0$ となる．対数をとると，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} Ny \ln R &= \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \\ -N \ln R &= \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \end{aligned} \tag{16.48}$$

[‡](訳註) 場の量子論に繰り込み群の手法を導入するひとつの考え方は，まず $a = 1$ の格子理論のような，連続ではないけれども正則な理論をつくり (格子正則化．p.66 訳註も参照)，適当な繰り込み処方を施してから，本節に示されているような粗視化の流れを逆に“遡って”連続極限の理論を得る (粗視化の結果，望ましい形の格子理論へと流れて来るような“上流の”連続理論を見いだす) というものである．粗視化の流れの下流に影響を及ぼさない“無効な摂動”があると，下流側から正しく上流へ遡ることができない (半群の変換を逆に辿ろうとするのだから，当然このような事態も生じ得る) ので，そのような摂動は“繰り込み不可能”ということになる．しかし一般に，繰り込み不可能な摂動は無視しておいても，低エネルギー領域 (下流) の物理の議論に実質的な支障は生じない．1940年代に場の理論における発散の困難を回避するための半経験的処方として開発された摂動的な繰り込み理論が成功を収めた背景には，上述のように低エネルギー領域の物理は必然的に繰り込み可能 (および超繰り込み可能) な摂動だけに支配されるという原理的な事情があったのだが，1970年代以降の繰り込み群理論の発達によって，初めてこのような普遍的な事情が理解されるようになった．

したがって，

$$-y\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)=\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{16.49}$$

もしくは，

$$\xi=\xi_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{1}{y}} \tag{16.50}$$

という関係が見いだされる．これが典型的なスケーリングの議論の方法である．

物理的に測定される指数 ν を決めるのは y であって，固有値 Λ そのものではないことに注意されたい．

ブロック化の操作 P については，多くの異なる方法が可能である．それらすべてが固定点を持つとは限らないし，また異なる固定点ハミルトニアン H^* を持つことも有り得る．それでも固定点の存在に起因する物理的な帰結は，同じものでなければならない．ブロック化を 3×3 のスピン配列で行っても，5×5 で行っても，同じ ν の値が得られなければならない．同様に，寸法比 R が異なるように P を選んでも，すべての固有値は $\Lambda_i=R^{y_i}$ の形になると期待される．y_i は R に依存しない．

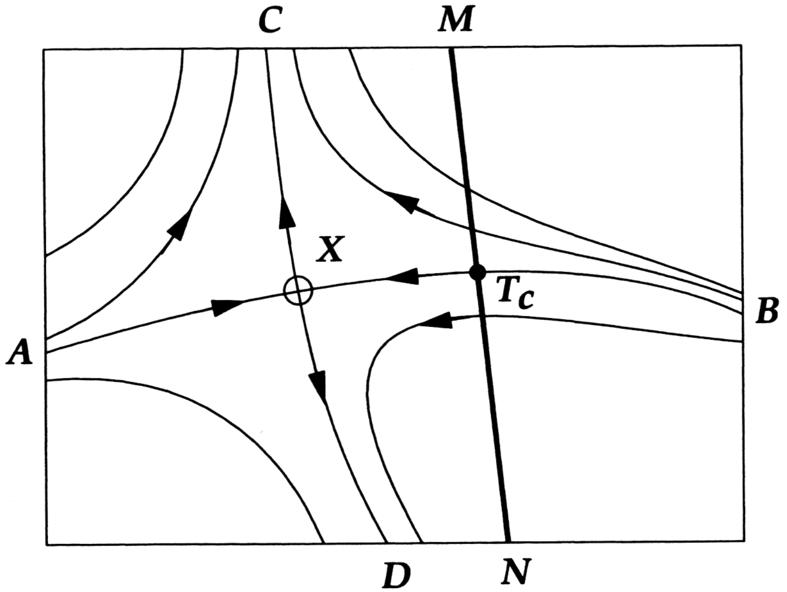


図 16.4 全パラメーター空間における繰り込み群の流れ．

2次元Ising模型のように，2つのパラメーター J，h を持つ系においては，一般にひとつのパラメーターに着目したパラメーター空間において，固定点ハミルトニ

アン H^* が見いだされるわけではない．その代わりに，パラメーター空間は T_c において，全点が固定点 (図 16.4 では X) に流れ込むような多様体と交わる．この吸引的な多様体 (attractive manifold) は，図中では曲線 AXT_cB によって表されている．パラメーター J を変えて得られるハミルトニアン一式は，MT_cN の線で表される．$J^{-1}=T_c$ における H と，固定点の H^* の違いは，無効な演算子だけである．吸引的な多様体上では，すべての点において $\xi=\infty$ である (ξ は繰り込み群の流れに沿って縮小するが，X において $\xi=\infty$ なので，多様体上のすべての点で $\xi=\infty$ でなければならない)．したがって吸引的な多様体は " 臨界面 " (critical surface) になっている．臨界面以外にある点は，大抵の場合，相関長がゼロになるような (温度が無限大もしくはゼロにあたる) 他の固定点へと流れる．稀にそのような点が，$\xi=\infty$ である他の固定点へと流れる場合もある．この状況下では " 乗り越え現象 " (crossover phenomena) が生じる．

パラメーター空間と，固定点に付随する臨界面との交差によって臨界温度が決まるという上記の描像は " 普遍性 " (universality) の起源を明らかにする．パラメーター空間が，固定点の " 捕獲領域 " と交わるような理論はすべて，全く同様の臨界挙動を示す．水やヘリウムなどの，様々な流体の液体－気体臨界点における挙動は，3 次元 Ising 模型の臨界挙動と全く同じである．場の理論を便宜的に離散化・正則化する手法はいろいろあるが，それらは結局，同じ連続場の理論を導くことになる．

16.3 相関関数

任意の演算子 $O(\mathbf{r})$ の相関関数 $G(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\langle O(\mathbf{r}_1)O(\mathbf{r}_2)\rangle_{\text{conn}}$ を，$H\to H-\sum_{\mathbf{r}}h(\mathbf{r})O(\mathbf{r})$ と置き，次の微分から求めることができる．

$$G(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1;H,h)=\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}(H,h)}{\delta h(\mathbf{r}_1)\delta h(\mathbf{r}_2)} \tag{16.51}$$

ここでは繰り込み群の下で，空間的に一様な h に関して，$H\xrightarrow{P}H'$，$h\xrightarrow{P}h'=\Lambda_O h$ ($\Lambda_O=R^{y_O}$) と仮定しよう．繰り込み群は $\mathcal{Z}$ を保存するので，次式が成立する．

$$\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}(H',h')}{\delta h'(\mathbf{r}_1)\delta h'(\mathbf{r}_2)}=\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}(H,h)}{\delta h'(\mathbf{r}_1)\delta h'(\mathbf{r}_2)} \tag{16.52}$$

ここで少し考察が必要である．式(16.52)の左辺は単なるブロックスピン理論の相関関数である．ブロック化によって，スケールは R だけ縮小するので，左辺は，

$$G\Big(\frac{1}{R}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),H',h'\Big) \tag{16.53}$$

である．右辺について見ると，$h'(\mathbf{r})$ を $\delta h'(\mathbf{r})$ だけ変化させることは，点 $\mathbf{r}$ を中心とするブロックで，すべての $O(\mathbf{r})$ の係数を $\delta h = R^{-y_O}\delta h'$ だけ変えることに相当する．したがって，計算すべき量は，

$$R^{-2y_O} \sum_{(\mathbf{r}_1 \in \text{ block 1})} \sum_{(\mathbf{r}_2 \in \text{ block 2})} G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; H, h) \tag{16.54}$$

である．$\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ は十分離れていて，ブロック内での位置の違いは問題にならないものとする．そうすると式(16.52)の右辺は，

$$R^{2d-2y_O} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; H, h) \tag{16.55}$$

となる．よって，

$$G\Big(\frac{1}{R}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), H', h'\Big) = R^{2d-2y_O} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; H, h) \tag{16.56}$$

である．$h = 0$，$H = H^*$ と置くと，固定点の相関関数は，

$$G(\mathbf{r}; H^*, 0) = |r|^{-(2d-2y_O)} \tag{16.57}$$

のように冪（べき）減衰することが分かる．この $\mathbf{r}$ 依存性は，それぞれの O が，ある意味で，あたかも次元 $[O] = M^{d-y_O}$ を持つように振舞うことを示している．我々は $d - y_O$ を演算子の“スケーリング次元”(scaling dimension) と呼ぶ．$y_O > 0$ であるが，これは演算子のスケーリング次元が，時空次元†より小さければ，O は有効な摂動であるという意味を伴っている．

時空次元とスケーリング次元の違いは，臨界点における場の分布が，自己相似なフラクタル性を持つことを反映しているのである．

†(訳註) 原著では the dimension of space-time と呼んだり，engineering dimension と言い替えたりしている．

第 17 章　場と繰り込み

本章では，ブロックスピンの描像から得られた繰り込み群に対する洞察を応用して，連続な Feynman ダイヤグラムの計算を理解するための指針を与える．

17.1　自由場固定点

d 次元時空におけるスカラー場から考察を始める．$\hbar = c = 1$ と置いて，あらゆる物理量 Q の次元が，適当な y を用いて $[Q] = M^y$ と表されるものとする．次元 y を見いだす際には，作用積分，

$$S[\varphi] = \int d^dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + V(\varphi) \right\} \tag{17.1}$$

が，

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi]\, e^{-S[\varphi]} \tag{17.2}$$

のように，指数関数の引数として現れることに注意しよう．S は“無次元量”でなければならない．

S は時空座標の積分 d^dx による d 乗と，2 つの ∂_{x^μ} による -2 乗を含む．したがって場 φ は，次の次元を持たなければならない．

$$[\varphi] = L^{1-\frac{d}{2}} \tag{17.3}$$

あるいは，

$$[\varphi] = M^{\frac{d}{2}-1} \tag{17.4}$$

と置いても等価である．我々は次元の基本量として常に M を用いるので，単に φ が次元 $\dfrac{d}{2} - 1$ を持つと言うこともある．φ の次元は，$d = 4$ の場合には 1 であり，$d = 2$ の場合には無次元である．

$V = 0$ のときの φ は自由場であり，質量を持たない．相関長は無限遠に及び，理論はスケール不変な臨界点に位置する．この点は“自由場固定点” (free-field fixed

point) と呼ばれる．質量を持たない自由場の相関関数 $\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle$ の計算方法は，付録 C に示してある．結果は次のようになる．

$$\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{d}{2}-1} \tag{17.5}$$

相関関数は，固定点における冪(べき)則の要請によって与えられるが，前章の定義によると，φ の“スケーリング次元”もまた $\frac{d}{2}-1$ である．時空次元とスケーリング次元が等しいのは，自由場固定点の特徴である．φ の時空次元は，常に $\frac{d}{2}-1$ であるが，スケーリングの性質は，別々の固定点において異なる．

前章で，スケーリング次元が時空次元よりも小さいならば，演算子は“有効”であることを示した．この性質により，質量を持たない自由場の作用に対する種々の摂動の有効性を調べることができる．自由場固定点において，単項の φ^n のスケーリング次元 (および時空次元) は $n\left(\frac{d}{2}-1\right)$ である．したがって，たとえば $\lambda\varphi^4$ という相互作用は，

$$2d-4<d \tag{17.6}$$

すなわち $d<4$ の場合に限り有効である．ちょうど 4 次元では，この相互作用は“境界的”になる．4 次元よりも次元が高くなると，この摂動は無効になる．後者の声明は，自由場固定点の近傍で連続な $\lambda\varphi^4$ 理論を構築する場合に，$\lambda\varphi^4$ 相互作用は粗視化の極限において効果を持たないことを意味している．伝統的な術語で言えば，このような無効な相互作用は“繰り込み不可能”である．繰り込み不可能な相互作用は，簡単な方法で“有限に”，もしくはエネルギー切断に依存しない形にすることができないので問題視される．現代的に表現すると，無効な相互作用は，切断に比べて十分低いエネルギー領域の物理には何の影響も及ぼさない．つまり切断を無限に高いエネルギーまで引き上げると，無効な相互作用は消失してしまう．したがって切断依存性をあらわに導入しなければ，無効な相互作用を扱うことはできない．これは単なる計算技術上の問題ということではなく，物理の在り方が，まさにそうなっていると見なさなければならないのである．

$\lambda\varphi^4$ 相互作用が 4 次元よりも高次元で無効になることを，直観的に説明することができる．d 次元空間の中に，2 つの滑らかな多様体があり，それぞれの次元が D_1，D_2 であるとしよう．一般にそのような多様体同士は，D_1+D_2-d 次元の領域で交わる．たとえば 3 次元空間における 2 つの曲面の交差は，1 次元曲線を形成し $(2+2-3=1)$，2 次元“空間”における 2 本の曲線は，ゼロ次元の点において交わる $(1+1-2=0)$．3 次元空間における 2 本の曲線は，通常は全く交わらな

い．$1+1-3=-1$ なので，負の次元は一般に，多様体が相互に交わらないことを意味する．ラグランジアンの $\lambda\varphi^4$ 項は，2 つの粒子を表す 2 本の世界線同士の点接触型相互作用を表し，いかなる摂動の効果にも，このような世界線同士の接触が関与する．第 15 章で見たように，Euclid時空における粒子の世界線は，実効的に酔歩と見なすことができ，酔歩はフラクタル次元 2 の集合を形成する．交差次元の計算を，この酔歩域に適用すると，通常，$d>4$ になると 2 つの酔歩は互いに交わらないことが分かる．また 4 次元より高い次元では，酔歩者が過去に訪れた地点を再び訪れることはなく，自己との相互作用は生じない．したがって世界線を格子上で“太く”しない限り，点接触型相互作用は何の効果ももたらさない．この発見的な説明を，厳密に論じ直すことも可能である．

4 次元未満の次元では，酔歩が互いに交わるようになり，自由場固定点は $\lambda\varphi^4$ に対して不安定になる．繰り込み群は有限の $\lambda=\lambda^*$ を持つ新たな固定点へ流れる．この“Wilson-Fisher固定点”は，理論の長距離における振舞いを決める．単一成分の φ 場では，この長距離の振舞いはIsing模型のそれと一致する．

質量項 $\dfrac{1}{2}m\varphi^2$ が有効となる条件は，

$$d-2<d \tag{17.7}$$

である．この不等式は常に成立するので，自由場の理論において，質量項は“常に”有効である．

$d=1$ の場合，場の量子論は量子力学に還元される．このときは $\varphi(t)$ の代わりに $x(t)$ と書く．x の時空次元は，驚くべきことに $-\frac{1}{2}$ である (これは $\hbar=c=1$ とおく慣例に依るものである)．同様に $[x^n]=-\frac{1}{2}n$ である．したがって x を用いた任意の多項式は有効である．このことは量子力学が，粒子を含む空間のポテンシャル場 $V(x)$ に対して敏感であることに整合している．量子力学において，多くの有効な相互作用があり得るので，径路積分の離散化の方法を選ぶときには細心の注意が必要である．我々はすでに第 12 章において，異なる離散化の方法が，ハミルトニアンにおける非可換な演算子の異なる序列に対応することを見ている．

φ が無次元となる 2 次元の場合に，重要な例が現れる．相互作用密度が次の形を持つものとする．

$$\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)\partial_\mu\varphi^\alpha\partial_\mu\varphi^\beta \tag{17.8}$$

$\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)$ は，場の変数一式 φ^α を引数とする任意の関数である．この相互作用は境界的であり，いわゆる“非線形 σ 模型”を与える．$\delta_{\alpha\beta}+\lambda_{\alpha\beta}(\varphi)$ が N-球面の計量となる場合を，後から扱うことにする．

17.2 Gauss模型

絶対値が1に固定されている2次元複素場φを考察する．φは$x-y$平面内の古典的スピン場と考えることができる．強磁性相互作用を持つ，そのようなスピン系の分配関数は，次式のようになる．

$$\mathcal{Z}=\int d[\varphi]d[\varphi^*]\,\delta(|\varphi|^2-1)\,e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^2x|\partial\varphi|^2} \tag{17.9}$$

$g^2=J/T$で，Jは交換係数，Tは温度である．

この理論において，$\langle\varphi(x)\varphi^*(y)\rangle$のような相関関数の計算を試みる．

場を次のように書き直す．

$$\varphi(x)=e^{i\theta(x)},\quad \varphi^*(x)=e^{-i\theta(x)} \tag{17.10}$$

そうすると分配関数は，次のように簡略化される．

$$\mathcal{Z}=\int d[\theta]\,e^{-\int d^2x\frac{1}{2g^2}(\partial\theta)^2} \tag{17.11}$$

この形に直すと，問題は自由場における指数関数演算子$e^{\pm i\theta(x)}$の相関関数の計算に還元される．

次のような相関関数，

$$\langle e^{i\theta(x_1)}e^{i\theta(x_2)}\ldots\rangle \tag{17.12}$$

を計算するために，Gauss積分の恒等式(12.74)を用いる．

$$\left\langle e^{i\int d^2xJ(x)\theta(x)}\right\rangle=e^{-\frac{1}{2}\int d^2xd^2yJ(x)G(x,y)J(y)} \tag{17.13}$$

$G(x,y)$は伝播関数である．2次元の場の理論において，作用を，

$$S=\frac{1}{g^2}\int d^2x\left\{\frac{1}{2}(\partial\theta)^2+\frac{1}{2}m_0^2\theta^2\right\} \tag{17.14}$$

とおくと，伝播関数は次のようになる．

$$\begin{aligned}G(x,m_0^2)&=g^2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{e^{ikx}}{k^2+m_0^2}\\&=g^2\left(-\frac{1}{2\pi}\ln m_0|x|+\text{const.}+O(m_0|x|)\right)\end{aligned} \tag{17.15}$$

ここで必要なのは，質量のない$m_0=0$の場合の伝播関数である．残念ながら$m_0\to0$とすると，小さいkのところで積分が発散する．この赤外発散(長距離に関係する)は，対数関数の中のm_0の起源であり，$G(x,y)$において単純に$m_0=0$と置いては

ならないことを意味する．したがって我々は，小さい有限質量を仮定して計算を遂行することにする．計算すべき部分を注意深く選ぶと，最終的な結果は m_0 には依存しない．

$\big\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\big\rangle$ を計算しよう．$J(x)=\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)$ と置いて計算を行う．

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\big\rangle &= \big\langle e^{i\theta(x_1)}e^{-i\theta(x_2)}\big\rangle \\ &= \exp\Big(G(0)-G\big(|x_1-x_2|\big)\Big)\end{aligned} \tag{17.16}$$

ここで我々は $G(0)$ の解釈の問題に直面する．これは $\propto \ln 0$ のように発散する．今度の無限大は“紫外”(ultraviolet) もしくは“短距離”の発散である．先に進むひとつの方法は，演算子 $\varphi(x_1)=\exp\big\{i\theta(x_1)\big\}$ を，

$$\varphi_a(x_1)=e^{i\int d^2x\,\rho_a(x-x_1)\theta(x)} \tag{17.17}$$

に置き換えることである．$\rho_a(x)$ は，原点近傍の a の範囲にわたって拡がりを持つ，何らかの“不鮮明化関数”(smearing function) であり，次式を満たす．

$$\int d^2x\,\rho_a(x)=1 \tag{17.18}$$

演算子の不鮮明化は，ある種のブロックスピン化と考えることができる．あるいは演算子を不鮮明化する代わりに，理論を格子間隔 a の格子上に移して，正則化することもできる．どちらの手法を用いても，同じ効果が得られる．すなわち発散する $\ln m_0 0$ が，有限の $\ln m_0 a$ に置き換わることになる．

このように切断 a を導入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\big\rangle &= \exp\Big(\frac{g^2}{2}\big(\ln am_0-\ln m_0|x_1-x_2|\big)\Big) \\ &= \left(\frac{a}{|x_1-x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}}\end{aligned} \tag{17.19}$$

赤外切断 m_0 が，2つの対数項によって相殺されることに注意されたい．しかしながら短距離切断 a は残る．

“繰り込み点”(renormalization point†) もしくは“繰り込み質量”(renormalization

†(訳註) 繰り込み“点”と呼ぶのは奇異な感じがするが，これは元々，相関関数や結節部分関数において，繰り込み条件を設定する“運動量”(相対論的な $\sqrt{p^2}$) の値のことである．(質量殻上繰り込み on-shell renormalizationの一般化．μ の次元は“運動量”＝“波数”とも“質量”とも取れる)．時空間に切断 a を導入すると理論は連続な性質を欠くことになるが，切断の役割を“波数”のパラメーターに移し替え，同時に時空間内で連続な取り扱いができる関数をつくるという意図で μ を導入するのである (式(17.35)参照)．μ を導入した関数において“波長”が $1/\mu$ 以下の紫外成分は，切断されるかわりに繰り込まれているという扱いになる．

mass) μ を導入することによって a 依存性を分離できる．$\langle\varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\rangle$ を，

$$\left(\frac{a}{|x_1-x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}}=\left(\frac{1}{\mu|x_1-x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}}(a\mu)^{\frac{g^2}{2\pi}} \tag{17.20}$$

のように分解し，右辺のはじめの a に依存しない因子を“繰り込まれた場”(renormalized field) $\varphi^{(\mathrm{R})}(x)$ の 2 点関数と見なす．ここで，

$$\varphi(x)=\sqrt{Z}\,\varphi^{(\mathrm{R})}(x) \tag{17.21}$$

$$\sqrt{Z}=(a\mu)^{\frac{g^2}{4\pi}}=e^{\frac{g^2}{4\pi}\ln\mu a} \tag{17.22}$$

である．元の $\varphi(x)$ は“裸の (bare) 場”，もしくは，繰り込まれていない (unrenormalized) 場と呼ばれる．繰り込まれた場の相関関数は，

$$\left\langle\varphi^{(\mathrm{R})}(x_1)\varphi^{*(\mathrm{R})}(x_2)\right\rangle=\left(\frac{1}{\mu|x_1-x_2|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \tag{17.23}$$

となる．この式は切断 a に依存しないので“有限”であり，$a\to 0$ で発散しない．

$\sqrt{Z}$ が局所的であること――相関関数全体にではなく，個々の $\varphi(x)$ に付随すること――を明示するために，一般的な相関関数を見てみる．

$$\left\langle\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\varphi^*(y_1)\ldots\varphi^*(y_m)\right\rangle=G^{(n,m)}_{\mathrm{bare}}(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m) \tag{17.24}$$

前と同じ方法により，この相関関数は，次のように表される．

$$\left(m_0^2\right)^{\frac{g^2}{4\pi}(n-m)^2}(a)^{\frac{g^2}{4\pi}(n+m)}\left(\frac{\prod_{i\neq j}^{n}|x_i-x_j|\prod_{i'\neq j'}^{m}|y_{i'}-y_{j'}|}{\prod_{i,j}|x_i-y_j|}\right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \tag{17.25}$$

m_0 が正の冪で現れることに注意されたい．m_0 をゼロにしても発散は生じないが，$n=m$ でない限り相関関数はゼロになる．$n=m$ は特殊であり，このときの相関関数は，次の大域的な O(2) 回転の下で不変である．

$$e^{i\theta(x)}\to e^{i\alpha}e^{i\theta(x)},\quad e^{-i\theta(x)}\to e^{-i\alpha}e^{-i\theta(x)} \tag{17.26}$$

質量項 $\dfrac{1}{2}m_0^2\theta^2$ は，この対称性をあらわに破り，すべてのスピンを $\theta=0$ の方向に揃わせる傾向を持つ．$n\neq m$ のときに $m_0\to 0$ において相関関数がゼロになることは，O(2) 対称性が自発的に破れないことを意味する．これは Mermin と Wagner，および Coleman によって与えられた一般的な定理の特別な場合として見ることができる．彼らの定理は，連続な大域的対称性が 2 次元以下の次元で自発的に破れることはない，というものである．

$n=m$ を仮定すると，式全体を変えずに，すべての a と $|x-y|$ のところに因子 μ を加えることができる．

$$G^{n,n}_{\text{bare}} = (\mu a)^{\frac{g^2}{4\pi}(2n)} \left(\frac{\prod^n_{i\neq j}(\mu|x_i - x_j|)\prod^m_{i'\neq j'}(\mu|y_{i'} - y_{j'}|)}{\prod_{i,j}(\mu|x_i - y_j|)} \right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \tag{17.27}$$

切断依存性は，再び $\varphi(x) = \sqrt{Z}\varphi^{(\mathrm{R})}$，$Z = (\mu a)^{\frac{g^2}{2\pi}}$ とおくことによって除かれる．

$$\begin{aligned} G^{n,n}_{\mathrm{R}} &\equiv \left\langle \varphi^{(\mathrm{R})}(x_1)\ldots\varphi^{(\mathrm{R})}(x_n)\varphi^{*(\mathrm{R})}(y_1)\ldots\varphi^{*(\mathrm{R})}(y_n) \right\rangle \\ &= \left(\frac{\prod^n_{i\neq j}(\mu|x_i - x_j|)\prod^n_{i'\neq j'}(\mu|y_{i'} - y_{j'}|)}{\prod_{i,j}(\mu|x_i - y_j|)} \right)^{\frac{g^2}{2\pi}} \end{aligned} \tag{17.28}$$

繰り込まれた場 $\varphi^{(\mathrm{R})}(x)$ は，以下の性質を持つ．

- 切断に依存しない (有限な) Green関数を持つ．
- 繰り込み点 μ に依存する．
- スケーリング次元は $M^{\frac{g^2}{4\pi}}$ である．
- 時空次元は M^0 である．

繰り込まれた相関関数の μ 依存性は，“ 裸の場 ” の相関関数が μ に依存しないことを用いて求めることができる．

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left\langle \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\varphi^*(y_1)\ldots\varphi^*(y_n) \right\rangle \\ &= Z^n \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + 2n\mu\frac{\partial \ln\sqrt{Z}}{\partial\mu} \right) \left\langle \varphi^{(\mathrm{R})}(x_1)\ldots\varphi^{(\mathrm{R})}(x_n)\varphi^{*(\mathrm{R})}(y_1)\ldots\varphi^{*(\mathrm{R})}(y_n) \right\rangle \end{aligned} \tag{17.29}$$

ここで，

$$\mu\frac{\partial \ln\sqrt{Z}}{\partial\mu} = \frac{g^2}{4\pi} \tag{17.30}$$

なので，次式が得られる．

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + 2n\frac{g^2}{4\pi} \right) G^{(n,n)}_{\mathrm{R}}(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n) = 0 \tag{17.31}$$

上式は，素粒子物理で用いられる繰り込み群方程式の一例である．これは前章の繰り込み群方程式(16.27)とは異なり，裸の場の理論を一定に保ちながら，繰り込み点

を変えたときの，繰り込まれた量の変化を記述している．統計物理学では，逆に繰り込まれた量を一定に保ちながら切断 a を変えるほうが普通であるが，これらの2種類の操作は互いに等価なものである．

繰り込み群方程式の有用性は，次節以降において追々明らかになる．

次の量，

$$\gamma(g^2) = \mu\frac{\partial \ln\sqrt{Z}}{\partial\mu} = \frac{g^2}{4\pi} \tag{17.32}$$

は，場の“異常次元”(anomalous dimension) と呼ばれる．これは場のスケーリング次元と，時空次元との差 (ずれ) を表す．

17.3　一般的な方法

一般的な繰り込みの方策としては，まず，ある大きな運動量 $\Lambda = a^{-1}$ における切断の下で，相関関数，

$$G = G_{\rm B}^{(n)}(x, g_{\rm B}, \Lambda) \tag{17.33}$$

を，裸の結合定数 $g_{\rm B}$ の冪級数展開として計算する．x は相関関数が含むすべての x_i を略記したものであり，また G の添字 B は，裸の場を用いた相関関数を意味する．自由場固定点において“有効”で，理論が持つべき対称性を満たす結合を，すべて計算に含めなければならない．この切断を持つ裸の相関関数を，繰り込まれた場と，繰り込まれた結合を含む $G_{\rm R}^{(n)}$ を用いて書く――後者は，ある繰り込み点 μ における理論のパラメーター計算から決まる．そうして次のような式が与えられる．

$$G_{\rm B}^{(n)}(x, g_{\rm B}, \Lambda) = Z^{\frac{n}{2}}\left(g_{\rm B}, \frac{\mu}{\Lambda}\right) G_{\rm R}^{(n)}(x, g_{\rm R}, \mu, \Lambda) \tag{17.34}$$

もし $x \gg \Lambda^{-1}$ であれば，裸の理論における“無効な”結合の効果をすべて無視することができるので，$G_{\rm R}^{(n)}$ は Λ に依存しない．

$$G_{\rm B}^{(n)}(x, g_{\rm B}, \Lambda) = Z^{\frac{n}{2}}\left(g_{\rm B}, \frac{\mu}{\Lambda}\right) G_{\rm R}^{(n)}(x, g_{\rm R}, \mu) \tag{17.35}$$

ここから，繰り込み群方程式を導くことができる．次の自明な恒等式，

$$0 = \mu\frac{\partial G_{\rm B}^{(n)}}{\partial\mu}\bigg|_{g_{\rm B},\Lambda} \tag{17.36}$$

を，$G_{\rm R}^{(n)}$ によって書き直すと，次の繰り込み群方程式が得られる．

$$0 = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_{\rm R})\frac{\partial}{\partial g_{\rm R}} + n\gamma(g_{\rm R})\right) G_{\rm R}^{(n)}(x, g_{\rm R}, \mu) \tag{17.37}$$

$$\beta(g_{\mathrm{R}}) = \mu \frac{\partial g_{\mathrm{R}}}{\partial \mu}\bigg|_{g_{\mathrm{B}},\Lambda}, \qquad \gamma(g_{\mathrm{B}}) = \mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu}\bigg|_{g_{\mathrm{B}},\Lambda} \tag{17.38}$$

また，別の観点から，

$$0 = \mu \frac{\partial G_{\mathrm{R}}^{(n)}}{\partial \Lambda}\bigg|_{g_{\mathrm{R}},\mu} \tag{17.39}$$

は，$G_{\mathrm{R}}^{(n)}$ によって次のように書き直される．

$$0 = \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \tilde{\beta}(g_{\mathrm{B}}) \frac{\partial}{\partial g_{\mathrm{B}}} - n\tilde{\gamma}(g_{\mathrm{B}})\right) G_{\mathrm{B}}^{(n)}(x, g_{\mathrm{B}}, \Lambda) \tag{17.40}$$

$$\tilde{\beta}(g_{\mathrm{B}}) = \Lambda \frac{\partial g_{\mathrm{B}}}{\partial \Lambda}\bigg|_{g_{\mathrm{R}}}, \qquad \tilde{\gamma}(g_{\mathrm{B}}) = \Lambda \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \Lambda}\bigg|_{g_{\mathrm{R}}} \tag{17.41}$$

後者の $G_{\mathrm{R}}^{(n)}$ を一定にして $G_{\mathrm{B}}^{(n)}$ の変化を見る方法は，式(16.27)の方法に近いものであり，統計力学的な文脈において，しばしばこの方法が用いられる．

明らかに β と γ は，x に依存しない．これらは Λ にも依存しないので，μ にも依存しない (μ を含んだ無次元量をつくることはできない)．したがって，これらの量は，無次元の結合定数 g_{R}^2 の単純な冪級数で表される．

17.4 非線形 σ 模型

繰り込みが役立つ具体的な例として，2 次元の O(N) 非線形 σ 模型を考察する．"σ 模型" (σ model) という呼称は，元々は素粒子物理のものであり，この模型は 3 つの軽い π 中間子 $\pi^{\pm}$，π^0 が，自発的なカイラル対称性の破れに伴う Goldstone ボゾンであるという概念の枠組みを与える．O(N) "線形" σ 模型は，O(N) 対称な相互作用ポテンシャルを持つ．

$$V(\varphi_i) = \frac{\lambda}{4!}\left(|\varphi|^2 - 1\right)^2 \tag{17.42}$$

φ は N 成分実場 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ を表す．"σ 模型" の名は，対称性を破った真空 $\varphi_0 = (1, 0, \ldots)$ を扱うときに，励起場を $\varphi = (\sigma, \pi_1, \ldots, \pi_{N-1})$ と書く習慣に由来する．$N-1$ 個の π 場が Goldstone ボゾンである π 中間子を表し，σ 場は質量を持つ，残された放射状モードを表す．ここで扱う "非線形" σ 模型は，$\lambda \to \infty$ と置き，$|\varphi|^2$ が 1 になるように条件を固定した模型である†．

†(訳註) $|\varphi|^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2$．

非線形 σ 模型における場を $\mathbf{R}^2 \to S^{N-1}$ の写像と捉えることができる．言い方を替えると，N 成分の場 $\mathbf{n} \equiv (n_1, \ldots, n_N)$ が，$\mathbf{n}^2 = 1$ の制約を持つ．この概念を $\mathbf{R}^N$ から任意の多様体 M への写像へと一般化することもできる．M は標的空間 (target space) と呼ばれる．しかしここでは，最も簡単な場合だけを扱うことにする．

分配関数は，次のように与えられる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\mathbf{n}]\, \delta(\mathbf{n}^2 - 1)\, e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})\cdot(\partial_\mu \mathbf{n})} \tag{17.43}$$

我々は，2次元の場合を考察することにする．この次元において結合定数 g^2 が無次元になるからである (d 次元では $[g^2] = M^{2-d}$ であり，相互作用は自由場固定点での境界的摂動となる)．

摂動級数を導くために，$\mathbf{n} \to g\mathbf{n}$ と置き換えると都合がよい．

$$\mathcal{Z} = \int d[\mathbf{n}]\, \delta\!\left(\mathbf{n}^2 - \frac{1}{g^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})\cdot(\partial_\mu \mathbf{n})} \tag{17.44}$$

この汎関数積分を評価するために，標的空間 S^{N-1} 上の座標系を選ぶ必要がある．

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{1}{g^2} - \pi^2} = \frac{1}{g}\sqrt{1 - g^2\pi^2} \\ n_i &= \pi^i, \quad N \geq i > 1 \end{aligned} \tag{17.45}$$

これらの座標は球面の半分だけを変数化しており，π 場は $\pi^2 g^2 < 1$ の制約を受ける．しかし摂動級数では，一様分布からの小さなゆらぎだけを扱うので，このような事情は問題にならない．

分配関数は，次のように書き直される．

$$\mathcal{Z} = \int d[\pi] \prod_x \sqrt{g(x)}\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2x\, g_{ij}\partial\pi^i\partial\pi^j} \tag{17.46}$$

g_{ij} は S^{N-1} の上で我々が選んだ座標の計量テンソルで，$g = \det(g_{ij})$ である．この計量テンソルは，

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i \pi^j}{1 - g^2\pi^2} \tag{17.47}$$

で，

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{1 - g^2\pi^2}} \tag{17.48}$$

である．したがって分配関数は次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \int \frac{d[\pi]}{\sqrt{1 - g^2\pi^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2x \left(\delta_{ij} + g^2 \frac{\pi^i\pi^j}{1 - g^2\pi^2}\right)\partial\pi^i\partial\pi^j} \tag{17.49}$$

最低次で見ると，作用は単純な $N-1$ 個の自由な π 場の形を持つ．続く次数において相互作用項が現れる——それぞれの g^2 の次数において，異なる項が生じる．$\mathbf{R}^2$ の各点 x に因子 $1/\sqrt{1-g^2\pi^2}$ がひとつずつあるので，$\delta^2(0)=\int d^2k/(2\pi)^2$ が $\mathbf{R}^2$ の中の点密度を表すことに注意して，上の分配関数を書き直すことができる．

$$\mathcal{Z}=\int d[\pi]\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2x\left\{\left(\delta_{ij}+g^2\frac{\pi^i\pi^j}{1-g^2\pi^2}\right)\partial\pi^i\partial\pi^j+\delta^2(0)\ln(1-g^2\pi^2)\right\}} \tag{17.50}$$

デルタ関数は，Ward 恒等式を保つために不可欠な，余分の点接触型相互作用を与える．

長波長，低エネルギーのゆらぎから生じる赤外発散の問題を避けるために，次の O(N) 不変な相関関数を計算するのが好ましい．

$$\langle\mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{n}(y)\rangle=\frac{1}{g^2}\left\langle\sqrt{1-g^2\pi^2(x)}\sqrt{1-g^2\pi^2(y)}\right\rangle+\langle\pi(x)\cdot\pi(y)\rangle \tag{17.51}$$

Gauss 模型の場合と同様に，対称性を破る場を導入して Goldstone モードに質量を与えなくとも，赤外計算を有限にすることができる．

最低次の各項は，

$$\left\langle\frac{1}{g^2}\right\rangle+\frac{1}{g^2}\left(-\frac{g^2}{2}\langle\pi^2(x)\rangle-\frac{g^2}{2}\langle\pi^2(y)\rangle\right)+\langle\pi^i(x)\pi^i(y)\rangle \tag{17.52}$$

であり，伝播関数は，

$$\begin{aligned}\langle\pi^i(x)\pi^i(y)\rangle&=\delta_{ij}\int\frac{d^2x}{(2\pi)^2}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+m_0^2}=-\frac{\delta_{ij}}{2\pi}\ln m_0(x-y)\\&=\delta_{ij}G(x-y)\end{aligned} \tag{17.53}$$

となる．ここでも m_0 は赤外切断を表しており，計算の途中には必要だが，最終的な結果には現れない．すなわち，

$$g^2\langle\mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{n}(y)\rangle=1+(N-1)g^2\big(G(x-y)-G(0)\big)+O(g^4) \tag{17.54}$$

となり，m_0 は 2 つの項によって相殺される．

次の次数では，平方根の展開から生じる各項，

$$\sqrt{1-g^2\pi^2}=1-\frac{1}{2}g^2\pi^2-\frac{1}{8}g^4\left(\pi^2\right)^2+\frac{1}{16}g^6\left(\pi^2\right)^3+\ldots \tag{17.55}$$

のうち，g^4 までを見なければならない．計量から生じる相互作用項の取り扱いが始まることになる．

平方根の展開から生じる $O(g^4)$ の項は,

$$\frac{1}{4}g^4\langle\pi^2(x)\pi^2(y)\rangle - \frac{1}{8}g^4\langle(\pi^2(x))^2\rangle - \frac{1}{8}g^4\langle(\pi^2(y))^2\rangle \tag{17.56}$$

であり,これらは次の寄与を持つ.

$$g^4\left\{\frac{1}{2}(N-1)G^2(x-y) + \frac{1}{2}G^2(0)\left\{\frac{1}{2}(N-1)^2 - \frac{1}{2}(N-1)^2 - (N-1)\right\}\right\} \tag{17.57}$$

$G^2(0)$ の掛かった 3 つの多項式は,以下に示すような 3 つの Wick縮約項から生じている.

$$\frac{g^4}{4}\langle\pi^i(x)\pi^i(x)\rangle\langle\pi^j(y)\pi^j(y)\rangle = \frac{g^4}{4}(N-1)^2G^2(0) \tag{17.58}$$

$$-\frac{g^4}{8}\left\{\langle\pi^i(x)\pi^i(x)\rangle\langle\{\pi^j(x)\pi^j(x)\rangle\} + \langle\pi^i(y)\pi^i(y)\rangle\langle\pi^j(y)\pi^j(y)\rangle\right\}$$
$$= -\frac{g^4}{4}(N-1)^2G^2(0) \tag{17.59}$$

$$-\frac{g^4}{4}\left\{\langle\pi^i(x)\pi^j(x)\rangle\langle\pi^j(x)\pi^i(x)\rangle + \langle\pi^i(y)\pi^j(y)\rangle\langle\pi^j(y)\pi^i(y)\rangle\right\}$$
$$= -\frac{g^4}{4}(N-1)G^2(0) \tag{17.60}$$

次に,相互作用に伴う各ループ,

$$\frac{g^2}{2}\frac{\pi^i\pi^j}{1-g^2\pi^2}\partial\pi^i\partial\pi^j = g^2\pi^i\pi^j\partial\pi^i\partial\pi^j + O(g^4) \tag{17.61}$$

と,

$$\frac{1}{2}\delta^2(0)\ln(1-g^2\pi^2) = -\frac{1}{2}\delta^2(0)\pi^2 + O(g^4) \tag{17.62}$$

が導かれる.

これらは任意の $O(g^2)$ 伝播関数を修正する.

k 空間において,図 17.1 のダイヤグラム $a)$ は,

$$\frac{k_\mu}{k^2}\left(\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{q_\mu}{q^2}\right)\frac{1}{k^2} \tag{17.63}$$

に等しいが,これは被積分関数の $q\to -q$ 対称性によってゼロになる.

ダイヤグラム $b)$ は,

$$\frac{1}{k^2}\left(\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{q^2}{q^2}\right)\frac{1}{k^2} \tag{17.64}$$

となり,測度から生じるダイヤグラム $d)$ と相殺する.

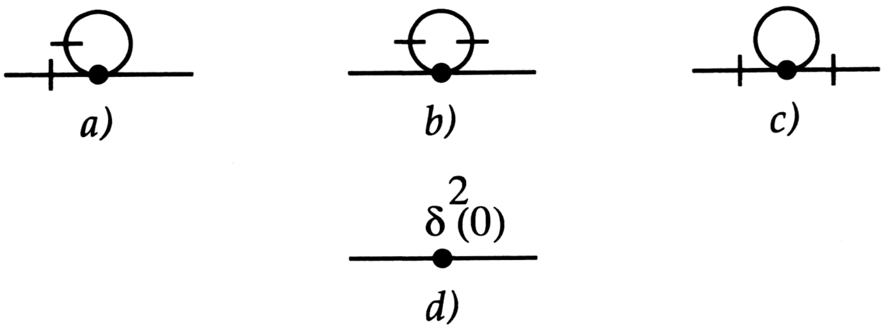


図 17.1　相互作用 $g^2\pi^i\pi^j\partial\pi^i\partial\pi^j$ から生じる 1 ループダイヤグラム．短線の印は，微分する伝播関数を表す．

残るダイヤグラム $c)$ は，次式で表される．

$$-g^2\int d^2z\partial_z G(z-y)\partial_z G(x-z)(N-1)G(0) \tag{17.65}$$

部分積分を行い，$\partial_x^2 G(x-y)=\delta^2(x-y)$ を用いると，これは次のようになる．

$$g^2(N-1)G(x-y)G(0) \tag{17.66}$$

これらのダイヤグラムを，ここまで考えたすべての $O(g^2)$ ダイヤグラムに挿入すると，相関関数は次のようになる．

$$\begin{aligned} g^2\langle\mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{n}(y)\rangle &= 1+g^2(N-1)\{G(x-y)-G(0)\} \\ &\quad +\frac{g^4}{2}(N-1)\{G(x-y)-G(0)\}^2+O(g^6) \end{aligned} \tag{17.67}$$

ここでも赤外領域では有限になるが，短距離において発散する 2 項の組み合わせ $\{G(x-y)-G(0)\}$ が見いだされる．

$G(x-y)=-\dfrac{1}{2\pi}\ln m_0|x-y|$ と $G(0)=G(\Lambda^{-1})$ を適用すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} g^2\langle\mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{n}(y)\rangle &= 1-\frac{g^2}{2\pi}(N-1)\ln\Lambda|x-y| \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{g^2}{2\pi}\right)^2(N-1)\ln^2\Lambda|x-y|+\dots \end{aligned} \tag{17.68}$$

場の成分数を $N=2$ と設定するならば，展開の初めの 2 項は次のようになる．

$$\exp g^2\{G(x-y)-G(0)\}\propto\frac{1}{|x-y|^{\frac{g^2}{2\pi}}} \tag{17.69}$$

これで我々は，摂動論における対数的な発散の起源を理解することができる．この発散は，相関関数の冪則を，場のスケーリング次元 (時空次元ではなく) を反映させるように修正する展開において現れる．対数的な発散は，典型的な場の分布が持つフラクタルな性質の直接的な帰結なのである．

17.4.1 繰り込み

我々は切断運動量 Λ を，繰り込まれた場 $\mathbf{n} = \sqrt{Z}\,\mathbf{n}_{\mathrm{R}}$ と，繰り込まれた結合定数 $g_{\mathrm{R}}^2(g^2)$ に吸収させなければならない．まずは最初の g^{-2} 因子を，$\mathbf{n}$ の定義を元の定義に置き換えて除くことにする．

最低次の次数において，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{n}(y)\right\rangle &= 1 - \frac{g^2}{2\pi}(N-1)\ln\Lambda|x-y| + O(g^4) \\ &= \left(1 + \frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}(N-1)\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)\right)\left(1 - \frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}(N-1)\ln\mu|x-y|\right) + O(g^4)\end{aligned} \tag{17.70}$$

この次数で $g^2 = g_{\mathrm{R}}^2 + O(g_{\mathrm{R}}^4)$ であり，次式が成り立つ．

$$Z = 1 + \frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}(N-1)\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + O(g_{\mathrm{R}}^4) \tag{17.71}$$

$|x| = \mu^{-1}$ において $G_{\mathrm{R}} \equiv Z^{-1}G_{\mathrm{B}}$ が 1 になることを要請して，任意の次数における Z を定義しよう．

$$Z(g_{\mathrm{B}}^2) = 1 - (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \frac{(N-1)}{2}\frac{g_{\mathrm{B}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \tag{17.72}$$

g_{R}^2 は，次式で定義する．

$$\left.\frac{\partial G_{\mathrm{R}}}{\partial \ln|x|}\right|_{x=\mu^{-1}} = -(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi} \tag{17.73}$$

左辺の式は，

$$Z^{-1}(g_{\mathrm{B}}^2)\left\{-(N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi} + (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^4}{(2\pi)^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right\} \tag{17.74}$$

なので，

$$\begin{aligned}g_{\mathrm{R}}^2 &= Z^{-1}(g_{\mathrm{B}}^2)\left\{1 - \frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right\}g_{\mathrm{B}}^2 + O(g_{\mathrm{B}}^6) \\ &= \left(1 + (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)\left\{1 - \frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right\}g_{\mathrm{B}}^2 + O(g_{\mathrm{B}}^6) \\ &= \left(1 + (N-2)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)g_{\mathrm{B}}^2 + O(g_{\mathrm{B}}^6)\end{aligned} \tag{17.75}$$

となる．この級数を逆に戻すと，次のようになる．

$$g_{\mathrm{B}}^2=\left(1-(N-2)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)g_{\mathrm{R}}^2+O(g_{\mathrm{R}}^6) \tag{17.76}$$

ここで g_{B}^2 を $Z(g_{\mathrm{B}}^2)$ に代入すると，

$$\begin{aligned}Z=1&-(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)+(N-1)(N-2)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\\&+\frac{(N-1)}{2}\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)+O(g_{\mathrm{R}}^6)\end{aligned} \tag{17.77}$$

となり，次式が得られる．

$$Z=1-(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)+(N-1)\left(N-\frac{3}{2}\right)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)+O(g_{\mathrm{R}}^6) \tag{17.78}$$

これらの結果を用いて，$G_{\mathrm{R}}=Z^{-1}G_{\mathrm{B}}$ の関係を見いだすことにする．次の，

$$(1+ax+bx^2+\ldots)^{-1}=1-ax+(a^2-b)x^2+\ldots \tag{17.79}$$

という関係式を利用すると，G_{R} は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{R}}=&\left(1+(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)+\frac{1}{2}(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)\\&\times\left(1-(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\Lambda|x|+\frac{1}{2}(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\Lambda|x|\right.\\&\left.+(N-1)(N-2)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln\Lambda|x|\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)+O(g_{\mathrm{R}}^6)\end{aligned} \tag{17.80}$$

計算を進めると，最終的に次式が得られる．

$$G_{\mathrm{R}}=1-(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\mu|x|+\frac{1}{2}(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\mu|x|+O(g_{\mathrm{R}}^6) \tag{17.81}$$

この式をよく見ると *montes parturiunt, nascetur ridiculus mus*[1)] のように，g_{B}^2 と Λ が g_{R}^2 と μ に置き換わったように見える．これは我々が選んだ g_{R}^2 の定義による結果である．高次では同様の置き換えは成立しない．

ここまで来ると，我々は繰り込み群方程式の係数を，G_{R} を，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g_{\mathrm{R}}^2)\frac{\partial}{\partial g_{\mathrm{R}}^2}+2\gamma(g_{\mathrm{R}}^2)\right)G_{\mathrm{R}}(\mu,x,g_{\mathrm{R}}^2)=0 \tag{17.82}$$

に従わせることによっても，β，γ を Z を用いて定義することによっても，見いだすことができる．

[1)] Quintus Horatius Flaccus (Horace), *Ars Poetica* 139.

前者の方法を実施するために,

$$\beta(g_\mathrm{R}^2) = b_1 g_\mathrm{R}^4 + O(g_\mathrm{R}^6)$$
$$\gamma(g_\mathrm{R}^2) = a_1 g_\mathrm{R}^2 + a_2 g_\mathrm{R}^4 + O(g_\mathrm{R}^6) \tag{17.83}$$

と仮定する．ここで式(17.81)を(17.82)に代入し，g_R^2 の各々の冪の係数がゼロになることを要求する．g_R^2 の係数は,

$$-(N-1)\frac{g_\mathrm{R}^2}{2\pi} + 2a_1 g_\mathrm{R}^2 = 0 \tag{17.84}$$

なので,

$$a_1 = \frac{1}{2}(N-1)\frac{1}{2\pi} \tag{17.85}$$

である．g_R^4 の係数については,

$$(N-1)\frac{g_\mathrm{R}^4}{(2\pi)^2}\ln\mu|x| - b_1\frac{g_\mathrm{R}^4}{2\pi}\ln\mu|x| - (N-1)a_1\frac{g_\mathrm{R}^4}{2\pi}\ln\mu|x| + a_2 g_\mathrm{R}^4 = 0 \tag{17.86}$$

なので，次の結果が得られる．

$$b_1 = -(N-2)\frac{1}{2\pi}, \quad a_2 = 0 \tag{17.87}$$

したがって，β と γ は次のようになる．

$$\beta(g_\mathrm{R}^2) = -(N-2)\frac{g_\mathrm{R}^4}{2\pi}$$
$$\gamma(g_\mathrm{R}^2) = (N-1)\frac{g_\mathrm{R}^2}{2\pi} + 0.g_\mathrm{R}^4 + O(g_\mathrm{R}^6) \tag{17.88}$$

これらの結果は，以下の定義式から直接確認することもできる．

$$\beta(g_\mathrm{R}^2) = \mu\left.\frac{\partial g_\mathrm{R}^2}{\partial\mu}\right|_{g_\mathrm{B}^2,\Lambda} \tag{17.89}$$

$$\gamma(g_\mathrm{R}^2) = \mu\left.\frac{\partial \ln\sqrt{Z}}{\partial\mu}\right|_{g_\mathrm{B}^2,\Lambda} \tag{17.90}$$

次の関係,

$$g_\mathrm{R}^2 = Z^{-1}(g_\mathrm{B}^2)\left\{1 - \frac{g_\mathrm{B}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right\}g_\mathrm{B}^2 = \left(1 + (N-2)\frac{g_\mathrm{B}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)g_\mathrm{B}^2 \tag{17.91}$$

を用いると，次式が得られる．

$$\mu\left.\frac{\partial g_\mathrm{R}^2}{\partial\mu}\right|_{g_\mathrm{B}^2,\Lambda} = -(N-2)\frac{g_\mathrm{B}^4}{2\pi} + O(g_\mathrm{B}^6) = -(N-2)\frac{g_\mathrm{R}^4}{2\pi} + O(g_\mathrm{R}^6) \tag{17.92}$$

同様に，

$$Z(g_{\mathrm{B}}^2) = 1 - (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \frac{(N-1)}{2}\frac{g_{\mathrm{B}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \tag{17.93}$$

により，

$$\mu\left.\frac{\partial Z}{\partial\mu}\right|_{g_{\mathrm{B}}^2,\Lambda} = (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^2}{2\pi} - (N-1)\frac{g_{\mathrm{B}}^4}{(2\pi)^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \tag{17.94}$$

となる．これに Z^{-1} を掛け，すべてを g_{B}^2 で表すことにより，γ が次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\gamma(g_{\mathrm{R}}^2) &= \frac{1}{2}Z^{-1}\mu\left.\frac{\partial Z}{\partial\mu}\right|_{g_{\mathrm{B}}^2,\Lambda} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + (N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \frac{(N-1)}{2}\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \\
&\quad\times\left((N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi} - (N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) - (N-1)(N-2)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln^2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi} + \frac{1}{2}\big((N-1)^2 - (N-1) - (N-1)(N-2)\big)\frac{g_{\mathrm{R}}^4}{(2\pi)^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}(N-1)\frac{g_{\mathrm{R}}^2}{2\pi} + 0.g_{\mathrm{R}}^4 + O(g_{\mathrm{R}}^6)
\end{aligned} \tag{17.95}$$

17.4.2 繰り込み群方程式の解

何故，我々は繰り込み群の議論に多くの時間を割いているのか？繰り込み群の有用性は，$G_{\mathrm{R}}(x)$ の摂動展開における n 番目の項が $(g_{\mathrm{R}}^2)^n\big(\ln\mu|x|\big)^n$ のような因子を含むことから生じている．x が $\mu|x| = 1$ を満たす繰り込み点から遠ざかるにつれて，この対数は大きくなり，g_{R}^2 が小さい場合にも高次補正が無視できなくなる．繰り込み群は，このような対数因子を，少なくともある x の範囲において制御できるようにする．繰り込み群がどのように働くかを見るために，繰り込み群方程式の解を考察する．繰り込み群方程式は 1 階の偏微分方程式で，“特性曲線の方法” (method of characteristics) によって解を求めることができる．偏微分方程式，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_{\mathrm{R}}^2)\frac{\partial}{\partial g_{\mathrm{R}}^2} + 2\gamma(g_{\mathrm{R}}^2)\right)G_{\mathrm{R}}(\mu, x, g_{\mathrm{R}}^2) = 0 \tag{17.96}$$

を，次のように書き直す．

$$\left[\frac{d}{dt} + 2\gamma\big(g^2(t)\big)\right]G_{\mathrm{R}}\big(\mu(t)x, g^2(t)\big) = 0 \tag{17.97}$$

$\mu(t)$ と $g_{\rm R}^2(t)$ は，次の常微分方程式に従う．

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu, \quad \frac{dg_{\rm R}^2}{dt} = \beta\bigl(g_{\rm R}^2(t)\bigr) \tag{17.98}$$

曲線 $\bigl(\mu(t), g_{\rm R}^2(t)\bigr)$ を，偏微分方程式の "特性曲線" (characteristic) と呼ぶ．$\mu(t)$ および $g_{\rm R}^2(t)$ のそれぞれの変化を通じて，ひとつの曲線が形成される．式(17.97) を特性曲線に沿って積分すると，

$$G\bigl(\mu x_0 e^{(t-t_0)}, g_{\rm R}^2(t)\bigr) = G\bigl(\mu x_0, g_{\rm R}^2(t_0)\bigr) e^{-\int_{t_0}^{t} \gamma(g_{\rm R}^2(t'))dt} \tag{17.99}$$

となる．t と $g_{\rm R}^2(t)$ は，次の関係で結ばれる．

$$(t - t_0) = \int_{g_{\rm R}^2(t_0)}^{g_{\rm R}^2(t)} \frac{dg^2}{\beta(g^2)} \tag{17.100}$$

この方程式を，視覚的に解釈することもできる．

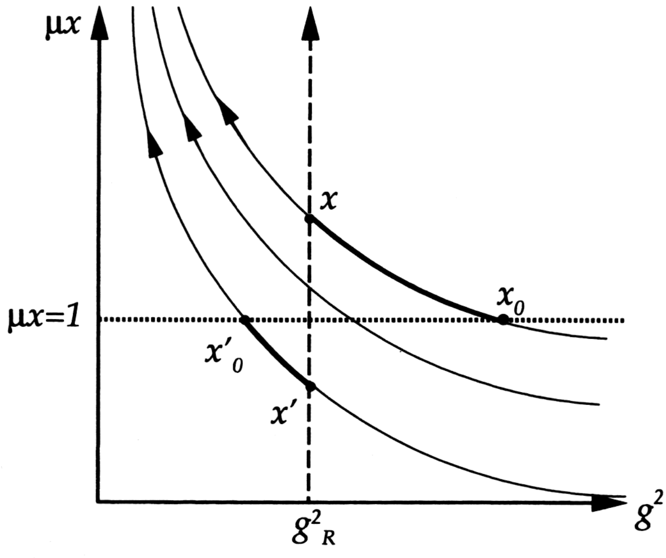


図 17.2 漸近的に自由な理論に対する繰り込み群の特性曲線.

図 17.2 は，β 関数が負の場合の $\mu - g_{\rm R}^2$ 平面上の特性曲線を示したものである．$G_{\rm R}$ は積 μx の関数なので，μ の代わりに x を動かすと考えてもよい．$g_{\rm R}^2$ を小さい値 (縦の破線の位置) に固定したときの，x の変化に対する $G_{\rm R}(\mu x, g_{\rm R}^2)$ の変化を見いだすために，繰り込み群方程式を用いることにする．$\mu x = 1$ (横方向の点線の位置) のときに $G_{\rm R}$ が 1 になるように $G_{\rm R}$ を定義してあるので，この条件のところで

初期値が与えられる．式(17.97)を特性曲線に沿って，x から $\mu x_0 = 1$ となる点 x_0 まで積分することにより，$G_{\rm R}(\mu x)$ が得られる．曲線群を見ると，μx が大きくなるにつれて，$\gamma(g_{\rm R}^2)$ を知る必要のある $g_{\rm R}^2$ の値も大きくなる．摂動理論は $g_{\rm R}^2$ が小さいときの $\gamma(g_{\rm R}^2)$ しか与えないので，我々は x が大きい領域の計算を扱うことができない．他方，μx が1より小さいとき (x' とする) の $G_{\rm R}(\mu x)$ を求める場合には，x' と x'_0 の間の領域だけで $\gamma(g_{\rm R}^2)$ を知る必要があるが，この領域は常に狭い．したがって小さい x の下では，$G_{\rm R}(\mu x)$ を正確に求めることができる．β 関数が負であり，その結果として短距離における振舞いが摂動論で扱える理論のことを，短距離において“漸近的に自由な”(asymptotically free) 理論と言う．

17.5 $\lambda\varphi^4$ の繰り込み

作用を，

$$S = \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi_{\rm B})^2 + \frac{1}{2}m_{\rm B}^2\varphi_{\rm B}^2 + \frac{1}{4!}\lambda_{\rm B}\varphi_{\rm B}^4 \Big\} \tag{17.101}$$

と置く．我々は“無限大”もしくは切断 Λ に依存する項を，いくつかの繰り込み定数に吸収して，すべての相関関数を有限にすることを試みる．繰り込まれた有限の質量を持つ理論のために，たとえば次のように設定する．

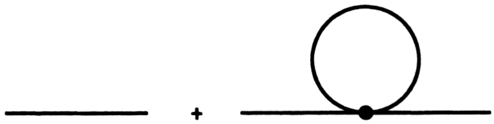
$$\begin{aligned} \lambda_{\rm B} &= Z_1\Big(\frac{m_{\rm R}^2}{\Lambda^2}, \lambda_{\rm R}\Big)\lambda_{\rm R} \\ \varphi_{\rm B} &= \sqrt{Z}\Big(\frac{m_{\rm R}^2}{\Lambda^2}, \lambda_{\rm R}\Big)\varphi_{\rm R} \\ m_{\rm B}^2 &= \Lambda^2 Z_2\Big(\frac{m_{\rm R}^2}{\Lambda^2}, \lambda_{\rm R}\Big) \end{aligned} \tag{17.102}$$

もし，最終的に質量によらない理論を望むならば，繰り込み点 μ を導入して，次のように置けばよい．

$$\begin{aligned} \lambda_{\rm B} &= Z_1\Big(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_{\rm R}\Big)\lambda_{\rm R} \\ \varphi_{\rm B} &= \sqrt{Z}\Big(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_{\rm R}\Big)\varphi_{\rm R} \\ m_{\rm B}^2 &= \Lambda^2 Z_2\Big(\frac{\mu}{\Lambda}, \lambda_{\rm R}\Big) \end{aligned} \tag{17.103}$$

ここでは，この質量によらない理論を採用することにする．

1ループまでの伝播関数は，次のようになる．



$$= \frac{1}{p^2} - \frac{\lambda_B}{2}\left(\frac{1}{p^2}\right)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_B^2} \qquad (17.104)$$

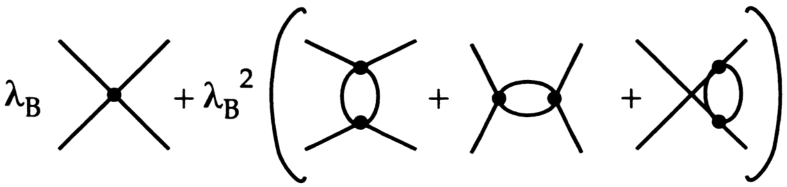
裸の質量を，

$$m_B^2 = -\frac{\lambda_B}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2} \qquad (17.105)$$

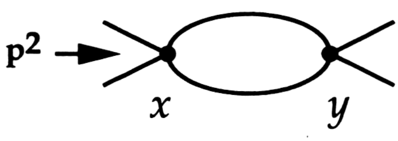
として，この次数までの質量をなくす．

この次数 (1ループ) までででは，波動関数の繰り込みが不要なので $Z = 1$ である．

裸の結節点は $-\lambda_B$ に等しい．1ループの次数では3種類の結節部分ダイヤグラムがあり，結節部分の総和は，次のように表される．



ひとつの結節部分ダイヤグラムを取り上げてみよう．



このFeynmanダイヤグラムは，実空間で評価するのが最も簡単である．関係する積分は，次のものである．

$$\int d^4x\, G^2(x,y)\, e^{ip(x-y)} = \frac{1}{(4\pi^2)^2}\int d^4x\, e^{ipx}\frac{1}{|x^2|^2} \qquad (17.106)$$

この式を次元正則化によって評価することができるが (後で行うが)，ここでは積分が実効的に，

$$\frac{1}{(4\pi^2)^2}\int \frac{d^4x}{|x^2|^2} \qquad (17.107)$$

で，これに振動する指数関数によって $x-y \approx p^{-1}$ の長距離切断が施されているものと見る．また $(x-y)=a=\Lambda^{-1}$ における短距離切断も含める必要がある．

$$\int d^4xG^2(x,y)e^{ip(x-y)} \approx \frac{2\pi^2}{(4\pi^2)^2}\int_{\Lambda^{-1}}^{|p|^{-1}} \frac{r^3dr}{r^4} = \frac{1}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{|p|}\right) \tag{17.108}$$

したがって，繰り込まれていない 4 点関数は，

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = \lambda_{\mathrm{B}} + \lambda_{\mathrm{B}}^2\frac{1}{16\pi^2}\left(\ln\frac{\sqrt{s}}{\Lambda} + \ln\frac{\sqrt{t}}{\Lambda} + \ln\frac{\sqrt{u}}{\Lambda}\right) + O(\lambda_{\mathrm{B}}^3) \tag{17.109}$$

となる．s，t，u は通常の運動学的不変量で，$s=(p_1+p_2)^2$ などである．

すでに言及したように，1 ループの次数まで，波動関数の繰り込みは不要なので $Z=1$ である．理論を有限なものにするために，裸の λ_{B} を繰り込まれた結合定数 λ_{R} で表す．λ_{R} が，結節点に 4 つの運動量が対称に入る組み合わせで評価した，4 点結節部分関数に等しいものと定義する．4 つの運動量 p_1，p_2，p_3，p_4 が $p_1+p_2+p_3+p_4=0$ および $p_i \cdot p_j = \dfrac{\mu^2}{4}(4\delta_{ij}-1)$ を満たすならば，$(p_i+p_j)^2=\mu^2$ である．そうすると，

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \lambda_{\mathrm{B}} + \lambda_{\mathrm{B}}^2\frac{3}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + \ldots \tag{17.110}$$

であり，したがって，

$$\beta(\lambda_{\mathrm{R}}) = \mu\left.\frac{\partial\lambda_{\mathrm{R}}}{\partial\mu}\right|_{\Lambda,\lambda_{\mathrm{B}}} = +\frac{3}{16\pi^2}\lambda_{\mathrm{R}}^2 \tag{17.111}$$

となる．プラスの符号は $\lambda\varphi^4$ 理論が漸近的に自由でないことを意味する．

他の入射運動量における繰り込まれた散乱振幅は，通例どおり λ_{B} を λ_{R} を用いて書き代えることで求まる．1 ループの次数までの書き代えは自明である．

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{R}} - \lambda_{\mathrm{R}}^2\frac{3}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(\lambda_{\mathrm{R}}^3) \tag{17.112}$$

これを式(17.109)に代入すると，切断に依存する項は消えて，4 点関数は，

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = \lambda_{\mathrm{R}}\left\{1 + \frac{1}{16\pi^2}\lambda_{\mathrm{R}}\left(\ln\frac{\sqrt{s}}{\mu} + \ln\frac{\sqrt{t}}{\mu} + \ln\frac{\sqrt{u}}{\mu}\right)\right\} + O(\lambda_{\mathrm{R}}^3) \tag{17.113}$$

と表される．これは“有限”になっている．

第 18 章　1/N展開法

この章では，線形および非線形の O(N) σ 模型における臨界現象を調べる．内部空間次元 N が大きい条件下での近似†を利用して，2 つの模型がその形式的な違いにもかかわらず，同じ物理を記述していることを示す．これは普遍性の一例である．

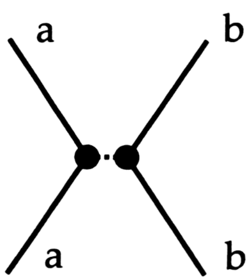
本章では次元正則化の手法を利用して，計算を簡略化する．しかしこの簡略化は，ある種の犠牲を伴う．次元正則化は発散を効果的に敷物の下に隠してしまうので，ともすると理論を定義するときの切断の役割を見失う恐れがある．

18.1　O(N) 線形 σ 模型

次元正則化を利用して，O(N) 線形 σ 模型の β 関数を計算することから始めよう．この模型は O(N) 対称性を持つ $\lambda\varphi^4$ 理論である．相互作用を次のように置く．

$$V(\varphi) = \frac{\lambda_B}{4!}\Big(\sum_{i=1}^{N}(\varphi_a)^2\Big)^2 \tag{18.1}$$

繰り込まれた相互作用を決めるために，添字の異なる φ_a および φ_b $(a \neq b)$ によって生成された，識別可能な 2 粒子間の散乱ダイヤグラムを計算するのが簡単である．最低次のダイヤグラムは，

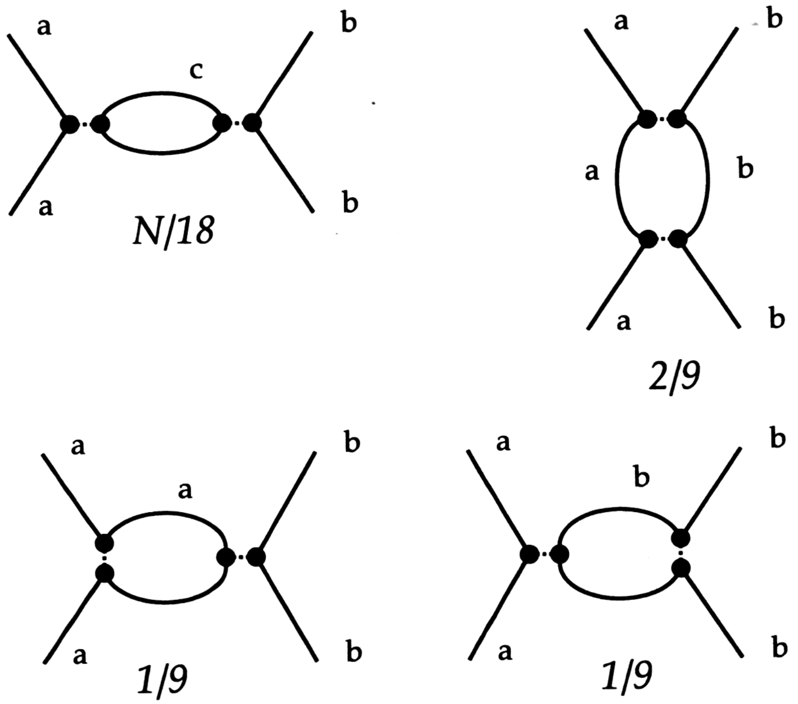


†(訳註) 原著ではこの近似を " lagre N expansions " と呼んでいるが，訳語として " 大N展開 " では収まりが悪いので，本稿では他の文献に倣い " 1/N 展開 (法) " としておく．

であり，これは次の寄与を持つ．

$$S_{ab\to ab} = -\frac{\lambda_{\rm B}}{3} \tag{18.2}$$

識別不可能な粒子同士の散乱に比べて，振幅が3分の1になることに注意されたい．これは相互作用を表す点線が，t チャネルだけに現れるからである．識別不可能な粒子の散乱では，このダイヤグラムの s チャネル版と u チャネル版を加えなければならない．



したがって，

$$S_{ab\to ab} = -\frac{\lambda_{\rm B}}{3} + \lambda_{\rm B}^2\frac{N}{18}\Pi(t) + \lambda_{\rm B}^2\frac{2}{9}\Pi(s) + \lambda_{\rm B}^2\frac{2}{9}\Pi(t) \tag{18.3}$$

であり，各々のループは，

$$\Pi(p^2) = \int d^dx\, e^{ipx}\big(G(x,0)\big)^2 \tag{18.4}$$

に対応する．p は運動量である．

気泡 $\Pi(p^2)$ は次元正則化を通じ，次式を用いて評価される．

$$G(x,0) = \frac{1}{4\pi^{d/2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\frac{1}{(x^2)^{d/2-1}} \tag{18.5}$$

$\Pi(p^2)$ は，次のように与えられる．

$$\Pi(p^2) = \frac{1}{16\pi^{d/2}}\left(\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\right)^2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p^2}{4}\right)^{d/2-2} \tag{18.6}$$

この式は，4 次元近傍では次のようになる．

$$\Pi(p^2) \approx \frac{1}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{2-\dfrac{d}{2}} - \ln\frac{p^2}{4}\right\} = \frac{1}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{4-d} - \ln|p| + \text{const.}\right\} \tag{18.7}$$

対数関数の引き数は，一般に無次元でなければならないので，$\ln|p|$ が現れるのは少々奇異に見える．この謎は，$d=4$ 以外で $\lambda_{\rm B}$ が無次元でなくなることに注意すると解決する．繰り込まれた結合定数を無次元に保つと都合がよいので，

$$\lambda_{\rm B} = \mu^{4-d}Z_1(\lambda_{\rm R}, d)\lambda_{\rm R} \tag{18.8}$$

と置く．μ は質量の次元を持ち，次元正則化において繰り込み点の役割を担う．

1 ループの散乱振幅は，したがって，

$$-\frac{\lambda_{\rm B}}{3} + \frac{\lambda_{\rm B}^2}{8\pi^2}\left\{\frac{N+8}{18}\frac{1}{4-d}\right\} + \frac{\lambda_{\rm B}^2}{8\pi^2}\left\{\frac{N+4}{18}\ln\sqrt{t} + \frac{4}{18}\ln\sqrt{s}\right\} \tag{18.9}$$

となる．s，t は通常の運動学的不変量である．

極の寄与を打ち消して理論を有限にするために，結合定数を次のように定義する．

$$\lambda_{\rm B} = \mu^{4-d}\lambda_{\rm R}\left\{1 + \lambda_{\rm R}\frac{N+8}{48\pi^2}\frac{1}{4-d} + O(\lambda_{\rm R}^2)\right\} \tag{18.10}$$

これによって，散乱振幅は次のように与えられる．

$$-\frac{\lambda_{\rm R}}{3} + \frac{\lambda_{\rm R}^2}{8\pi^2}\left\{\frac{N+4}{18}\ln\left(\frac{\sqrt{t}}{\mu}\right) + \frac{4}{18}\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\mu}\right)\right\} + O(\lambda_{\rm R}^3) \tag{18.11}$$

次式に基いて，式(18.10)から $\beta(\lambda_{\rm R})$ を導くことができる．

$$0 = \mu\left.\frac{\partial\lambda_{\rm B}}{\partial\mu}\right|_{\lambda_{\rm B}} = (4-d)\lambda_{\rm B} + \beta(\lambda_{\rm B})\frac{\partial\lambda_{\rm B}}{\partial\lambda_{\rm R}} \tag{18.12}$$

したがって，

$$0 = (4-d)\mu^{4-d}\lambda_{\rm R}\left(1 + \lambda_{\rm R}\frac{N+8}{48\pi^2}\frac{1}{4-d}\right) + \beta(\lambda_{\rm R})\mu^{4-d}\left(1 + \lambda_{\rm R}\frac{N+8}{24\pi^2}\frac{1}{4-d}\right) \tag{18.13}$$

もしくは，

$$0 = (4-d)\lambda_{\mathrm{R}}\left(1 - \lambda_{\mathrm{R}}\frac{N+8}{48\pi^2}\frac{1}{4-d}\right) + \beta(\lambda_{\mathrm{R}}) \tag{18.14}$$

であり，最終的に次式を得る．

$$\beta(\lambda_{\mathrm{R}}) = (d-4)\lambda_{\mathrm{R}} + \frac{N+8}{48\pi^2}\lambda_{\mathrm{R}}^2 + O(\lambda_{\mathrm{R}}^3) \tag{18.15}$$

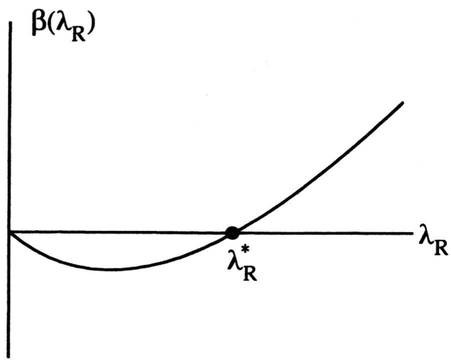


図 18.1 $(4-\epsilon)$ 次元における関数 $\beta(\lambda_{\mathrm{R}})$.

次元 $d = 4-\epsilon$ で $\beta(\lambda_{\mathrm{R}})$ をプロットすると，$\lambda_{\mathrm{R}} = O(\epsilon)$ のところで，赤外安定な固定点 (infrared stable fixed point) を見いだすことができる．これが "Wilson-Fisher 固定点" である．この固定点は，次元が $2 < d < 4$ の $\mathrm{O}(N)$ 模型の臨界挙動を支配する．臨界指数は Gauss模型の値と $O(\epsilon)$ だけ異なる．λ_{R} の冪(べき)による摂動展開は，臨界指数を ϵ の冪で展開する "ϵ 展開" (ϵ-expansion) と等価である．この展開を得る際に，次元正則化はレギュレーター (regulator) と展開パラメーターの役割りを結びつける．これは強力な計算手段になるが，物理描像を曖昧にしてしまうという欠点もある[1)].

ϵ が整数でない場合，$4-\epsilon$ 次元の理論に物理的な意味はない．ここでの ϵ 展開は $\epsilon = 1$ のときの $d = 3$ の指数を計算するためのトリックにすぎない．しかしながら $0 \leq \epsilon \leq 2$ の領域で，連続に理論が存在すると仮想してみるのも興味深い．続く 2 つの節で，この魅惑的な概念を取り上げてみる．

[1)] 切断に基いた ϵ 展開へのアプローチに関しては，Brèzin, Le Guillou, and Zinn-Justin の解説 (*Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb, M. S. Green, eds. Academic Press, 1976, vol.6) を推奨する．

18.2 1/N展開

この節では，O(N) 対称な模型を，2 次元から 4 次元の間で考察してみる．N が大きいとき，これらの模型は基本的に閉じた形で解くことができる[2)]．この極限を，前章で取り上げた O(N) 非線形 σ 模型と，O(N) 線形 σ 模型について考える．

前章に示したように，非線形 σ 模型の分配関数は，

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] \prod_x \delta\big(|\varphi(x)|^2 - 1\big) e^{-\frac{1}{2g_\mathrm{B}^2}\int d^dx(\partial\varphi)^2} \tag{18.16}$$

と表される．φ は N 成分実場である．デルタ関数を次のように書いて，$|\varphi(x)|^2 = 1$ の条件を課する．

$$\delta\big(|\varphi(x)|^2 - 1\big) = \int_C \frac{d\alpha(x)}{2\pi}\, e^{-\alpha(x)(|\varphi(x)|^2-1)} \tag{18.17}$$

C は虚軸に沿った積分路である．各々の時空点 x について，変数 $\alpha(x)$ が対応するので，α は新しい“Lagrangeの未定係数場”になる．分配関数は次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi]d[\alpha]\, e^{-\frac{1}{2g_\mathrm{B}^2}\int d^dx\left\{(\partial\varphi)^2 + i2g_\mathrm{B}^2\alpha(|\varphi|^2-1)\right\}} \tag{18.18}$$

$\varphi(x)$ の積分はGauss積分で，これを実行すると次式が得られる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\alpha]\, e^{-\frac{N}{2}\ln\det(-\partial^2+2g_\mathrm{B}^2\alpha)+i\int d^dx\,\alpha(x)} \tag{18.19}$$

“N が大きい極限”とは，$g_\mathrm{B}^2 N$ を一定に保って N を無限大にする操作を意味する．$m^2(x) = 2g_\mathrm{B}^2\alpha(x)$ と定義して，分配関数を書き直す．

$$\mathcal{Z} = \int d[m^2]\, e^{-\frac{N}{2}\ln\det(-\partial^2+m^2)+N\int d^dx\frac{1}{g_\mathrm{B}^2N}m^2} \tag{18.20}$$

ここでは指数関数の中の各項が因子 N を持つ．これは N が大きいと，$m^2(x)$ の汎関数積分が，おそらく最速降下法 (the method of steepest descent) で評価できることを意味する．我々は指数部分の関数の停留点を探し，指数をその停留点の値に置き換えて積分を評価する．このとき $m^2(x)$ は停留点の位置に依存しないという，もっともらしい仮定を置くと，停留条件は次式で与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\left\{-\frac{N}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln(k^2+m^2) + N\frac{1}{g_\mathrm{B}^2N}\right\} = 0 \tag{18.21}$$

[2)] N が大きい極限に関するここでの議論は，E. Brèzin, J. Zinn-Justin, Physical Review **B14** (1976) pp.3110-3120 に基いている．

これは，次のようになる．

$$1 = Ng_{\mathrm{B}}^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2+m^2} \tag{18.22}$$

この式は，超伝導のBCS理論を議論したときに見た“ギャップ方程式”と基本的に同じものである．

積分の次元正則化は，

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2+m^2} = \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \left(m^2\right)^{d/2-1} \tag{18.23}$$

となるので，次式が得られる．

$$1 = Ng_{\mathrm{B}}^2 \left\{ \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \left(m^2\right)^{d/2-1} \right\} \tag{18.24}$$

ここで，次のように関数 $A(d)$ を定義する．

$$A(d) = \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \equiv \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} \frac{2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2-d} \tag{18.25}$$

そうすると，ギャップ方程式を次のように書ける．

$$\frac{1}{g_{\mathrm{B}}^2} = NA(d)(m^2)^{d/2-1} \tag{18.26}$$

ガンマ関数は $d \to 2$ で発散するので，この極限で有限な式を得るために，g_{R}^2 を次式によって定義する．

$$\frac{1}{g_{\mathrm{B}}^2} = \frac{(\mu^2)^{d/2-1}}{g_{\mathrm{R}}^2} + NA(d)(\mu^2)^{d/2-1} \tag{18.27}$$

次元パラメーター μ (単位は $[\mu] = M$ である) を導入したことによって，任意の時空次元において g_{R}^2 が無次元になることに注意されたい．g_{R}^2 と g_{B}^2 の関係は次のようにも書ける．

$$g_{\mathrm{B}}^2 = \mu^{2-d} g_{\mathrm{R}}^2 \left(1 + g_{\mathrm{R}}^2 NA(d)\right)^{-1} = \mu^{2-d} g_{\mathrm{R}}^2 Z_1 \tag{18.28}$$

g_{R}^2 を用いた，繰り込まれたギャップ方程式は，

$$1 = Ng_{\mathrm{R}}^2 A(d) \left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{\frac{d}{2}-1} - 1 \right\} \tag{18.29}$$

であり，$d=2$ の付近で，

$$A(d) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2-d} + O(1) \tag{18.30}$$

となる．$d=2$ に近づいても，ギャップ方程式の係数は有限値を保ち，方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} 1 &= g_{\rm R}^2 N \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-d}\left\{1+\left(\frac{d}{2}-1\right)\ln\frac{m^2}{\mu^2}+O\left(\left(\frac{d}{2}-1\right)^2\right)-1\right\} \\ &\to -g_{\rm R}^2 N\frac{1}{\pi}\ln\frac{m^2}{\mu^2} \end{aligned} \tag{18.31}$$

これを書き直すと，

$$m^2 = \mu^2\, e^{-\frac{\pi}{g_{\rm R}^2 N}} \tag{18.32}$$

となる．m^2 は N 個の φ 場成分すべてに共通する質量を表す量である．2 次元では，この模型は自発的な対称性の破れを起こさず，Goldstoneボゾンも発生しない．裸の理論は次元パラメーターを含まないが，この動的に誘起された質量は，スケールを決める繰り込み点質量を取り込んでいる．

2 次元より高い次元では，自発的に対称性の破れた状態へ相転移が起こる．このことを見るために，$A(d)$ が時空次元 $2<d<4$ の範囲で "負" であることに着目しよう．この d の範囲で，

$$1 = -N(g_{\rm R}^*)^2 A(d) \tag{18.33}$$

を満たすような臨界値 $(g_{\rm R}^*)^2$ が存在する．m^2 が正であれば，$g_{\rm R}^2<(g_{\rm R}^*)^2$ においてギャップ方程式の解はない．必ずしも自明ではないが，この領域で虚数の m を考えるよりも，単純に $m^2=0$ と置いて，φ 粒子の質量がないものとしてみよう．この場合，O(N) 対称性は自発的に破れており，質量のない粒子はGoldstoneボゾンである．$d\to 2$ のとき，$(g_{\rm R}^*)^2=O(d-2)$ であることに注意せよ．

式(18.28)から関数 $\beta(g_{\rm R}^2)$ を計算しよう．次式を利用する．

$$0 = \mu\left.\frac{\partial g_{\rm B}^2}{\partial\mu}\right|_{g_{\rm B}^2} = (4-d)g_{\rm B}^2 + \beta(g_{\rm R}^2)\frac{\partial g_{\rm B}^2}{\partial g_{\rm R}^2} \tag{18.34}$$

ここで，$\left(1-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)=\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$ の関係を用いて，次式を得る．

$$\begin{aligned} \beta(g_{\rm R}^2) &= (d-2)g_{\rm R}^2\left(1+g_{\rm R}^2 N A(d)\right) \\ &= (d-2)g_{\rm R}^2 - g_{\rm R}^4 N\frac{1}{2^d\pi^{d/2}}2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \\ &\approx (d-2)g_{\rm R}^2 - \frac{N}{2\pi}g_{\rm R}^4 \end{aligned} \tag{18.35}$$

最後の行の近似は，$d=2$ の近傍で成立する．

この結果を，$d=2$ における摂動論的な計算から直接求めた式，

$$\beta(g_{\rm R}^2) = -\frac{(N-2)}{2\pi}g_{\rm R}^4 + O(g_{\rm R}^6) \tag{18.36}$$

と比較してみよう．大きい N に関する計算は，少なくとも $\beta(g_{\rm R}^2)$ の最初の項の，大きい N での振舞いを再現している．

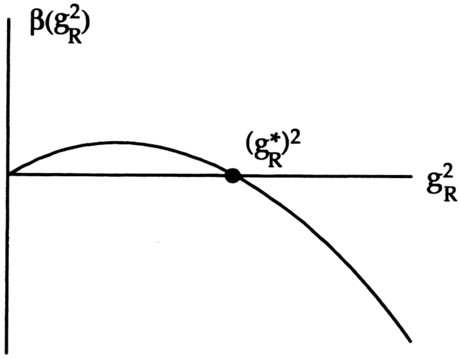


図 18.2 $(2+\epsilon)$ 次元における関数 $\beta(g_{\rm R}^2)$.

β 関数が臨界値 $(g_{\rm R}^*)^2$ においてゼロになることに注意されたい．この臨界点は，繰り込み群の流れの固定点であり，固定点からの作用のずれ $g_{\rm R}^2$ は有効な演算子である．

誘起された質量 m^2 は，裸の結合 $g_{\rm B}^2$ と次元 d だけの関数である．したがって $g_{\rm B}^2$ を一定に保ったまま μ と $g_{\rm R}^2$ を変えても，質量は変わらないはずである．このことは，m^2 が次の繰り込み群方程式を満たすことを意味している．

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g_{\rm R}^2)\frac{\partial}{\partial g_{\rm R}^2}\right)m^2=0 \tag{18.37}$$

m^2 に式(18.32)を代入すると，実際に上式を満たしていることが分かる．

18.2.1 線形および非線形の σ 模型

非線形 σ 模型の $m^2=0$ 領域を解析するために，状態方程式を調べる．これを強磁性体の模型と考え，$\varphi=(\sigma,\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{N-1})$ と書くことにすると，状態方程式は，磁化 $\langle\sigma\rangle$ を，対称性を破る外部磁場 h と関係づける．h 場を含めた分配関数を次のように書く．

$$\mathcal{Z}(h)=\int d[\varphi]\delta(|\varphi|^2-1)\,e^{-\frac{1}{2g_{\rm B}^2}\int d^dx\left\{(\partial\varphi)^2-h\sigma\right\}} \tag{18.38}$$

再び拘束のための外場 $\alpha(x)$ を導入し，$(N-1)$ 個の π 場に関して積分を行うと，次式を得る．

$$\mathcal{Z} = \int d[\sigma]d[\alpha]\, e^{-\frac{1}{g_B^2}\int d^dx\left\{\frac{1}{2}(\partial\sigma)^2+\frac{1}{2}\alpha g_B^2\sigma^2-h\sigma-\frac{1}{2}\alpha g_B^2\right\}} \times e^{-\frac{1}{2}(N-1)\ln\det(-\partial^2+\alpha g_B^2)} \tag{18.39}$$

ここで両方の積分を，指数を停留点に置き換えて実行できることを論じる．α の積分に関する正当化の理由は，前と同じである――$\ln\det$ の外の大きな因子 $(N-1)$ に依る．σ の積分については，$g_B^2 N$ は $O(1)$ で，g_B^2 が小さいことを思い起こそう．このことにより σ 場の停留相の取り扱いが正当化される．

運動方程式は，次のように与えられる．

1) σ の変化：

$$\sigma\alpha g_B^2 - h = 0 \tag{18.40}$$

2) α の変化：

$$-\frac{(N-1)}{2}\left\{\frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\left(m^2\right)^{\frac{d}{2}-1}\right\} + \frac{(1-\sigma^2)}{2g_B^2} = 0 \tag{18.41}$$

(前と同様に $m^2 = \alpha g_B^2$ とした.)

繰り込みのために，次のように置く．

$$\frac{1}{g_B^2} = \frac{(\mu^2)^{d/2-1}}{g_R^2} + (N-1)A(d)(\mu^2)^{d/2-1} \tag{18.42}$$

N が大きい極限を考察するので，N の代わりに $N-1$ が現れることは重要な違いではない．N と $N-1$ を簡単に区別することはできない．前と同様に，g_B^2 を次のように書く．

$$g_B^2 = \mu^{2-d}\left(1+g_R^2 NA(d)\right)^{-1} = \mu^{2-d}Z_1 g_R^2 \tag{18.43}$$

また，繰り込まれた場を定義しなければならない．

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{Z}\,\sigma_R\\ h_B &= Z_1 Z^{-\frac{1}{2}} h_R\end{aligned} \tag{18.44}$$

$Z = Z_1$ とすると，有限な表式が得られる．

状態方程式は，次のようになる．

$$(1-\sigma_R^2) = (N-1)A(d)g_R^2\left(\mu^{2-d}\left(\frac{h_R}{\sigma_R}\right)^{\frac{d}{2}-1} - 1\right) \tag{18.45}$$

この方程式は $d \to 2$ において有限である．$g_R^2 > (g^*)_R^2$ で $h = 0$ の場合，h_R/σ_R の組み合わせを m^2 に置き換えることができ，状態方程式は前のギャップ方程式になる．他方，$g_R^2 < (g^*)_R^2$ で $h = 0$ の場合でも解は存在するが，σ_R^2 がゼロではなくなる．

これを 4 次元以下の “線形” σ 模型の状態方程式と比較してみよう．再び $\varphi = (\sigma, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{N-1})$ と書くと，線形 σ 模型の分配関数と作用は，次のように与えられる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\pi]d[\sigma]\, e^{-S(\pi,\sigma,H)} \tag{18.46}$$

$$S = \int d^dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - H\sigma + \frac{\lambda_B}{4!}\left(\sigma^2 + \pi^2\right)^2 + \frac{1}{2}m_B^2(\sigma^2 + \pi^2) \right\} \tag{18.47}$$

ここに相互作用を分離する場 α を導入すると，次のように変わる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\pi]d[\sigma]d[\alpha]\, e^{-\tilde{S}(\pi,\sigma,\alpha,H)} \tag{18.48}$$

$$\tilde{S} = \int d^dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - H\sigma + \frac{\alpha}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{3}{2\lambda_B}\left(\alpha - m_B^2\right)^2 \right\} \tag{18.49}$$

π について積分すると，分配関数は次のようになる．

$$\mathcal{Z} = \int d[\sigma]d[\alpha]\, e^{-\int d^dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 - H\sigma + \frac{\alpha}{2}\sigma^2 - \frac{3}{2\lambda_B}(\alpha - m_B^2)^2 \right\}} \times e^{-\frac{1}{2}(N-1)\ln\det(-\partial^2 + \alpha)} \tag{18.50}$$

再び N が大きいものとして，汎関数積分を停留点の値を用いた積分に置き換えて評価する．停留点を決める方程式は，次のように与えられる．

1) σ の変化：

$$\alpha\sigma - H = 0 \tag{18.51}$$

2) α の変化：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{3}{\lambda_B}(\alpha - m_B^2) + \frac{(N-1)}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2 + \alpha} = 0 \tag{18.52}$$

繰り込みのために，積分を，

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left\{ \frac{1}{k^2 + \alpha} - \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha}{(k^2 + \alpha)^2} \right\} + \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} - \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\alpha}{(k^2 + \mu^2)^2} \tag{18.53}$$

と分解し，また次のように書く．

$$\frac{m_B^2}{\lambda_B} = \mu^{d-4}\frac{m_R^2}{\lambda_R} - \frac{(N-1)}{6}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} \tag{18.54}$$

ここで,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \tag{18.55}$$

のような積分は，次元正則化でゼロになるので，実効的に,

$$\frac{m_{\mathrm{B}}^2}{\lambda_{\mathrm{B}}} = \mu^{d-4} \frac{m_{\mathrm{R}}^2}{\lambda_{\mathrm{R}}} \tag{18.56}$$

となる．ただしこれは，一般の正則化において正しいわけでは“ない”．

次のように置いて，繰り込まれた結合を定義する．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{B}}} &= \frac{\mu^{d-4}}{\lambda_{\mathrm{R}}} - \frac{(N-1)}{6} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2+\alpha)^2} \\ &= \frac{\mu^{d-4}}{\lambda_{\mathrm{R}}} - \frac{(N-1)}{6} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2}} \mu^{d-4} \end{aligned} \tag{18.57}$$

こうすると，繰り込まれた状態方程式は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{R}}^2 + \frac{6 m_{\mathrm{R}}^2 \mu^{d-4}}{\lambda_{\mathrm{R}}} &= (N-1) \frac{2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2} (2-d)} \left(\frac{H_{\mathrm{R}}}{\sigma_{\mathrm{R}}}\right)^{\frac{d}{2}-1} \\ &\quad + \mu^{d-4} \left(\frac{H_{\mathrm{R}}}{\sigma_{\mathrm{R}}}\right) \left\{ \frac{6}{\lambda_{\mathrm{R}}} - (N-1) \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2}} \right\} \end{aligned} \tag{18.58}$$

これは非線形 σ 模型から得た式と，正確に同じではないように見える——しかし少なくとも $d<4$ のとき，H/σ が小さい臨界領域においては，H/σ の 1 次の項が $(H/\sigma)^{\frac{d}{2}-1}$ より小さくなることに注意されたい．この支配的でない項を無視すれば，両者の状態方程式はよく似ている．

$\beta(\lambda_{\mathrm{R}})$ を計算しよう．まず関数 B を次のように定義する．

$$B(d) = \frac{(N-1)}{6} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2}} \tag{18.59}$$

これにより,

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{B}}} = \frac{\mu^{d-4}}{\lambda_{\mathrm{R}}} - \frac{(N-1)}{6} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2}} \mu^{d-4} \tag{18.60}$$

を，次のように書き替える．

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \mu^{4-d} \lambda_{\mathrm{R}} \left(1 - \lambda_{\mathrm{R}} B(d)\right)^{-1} \tag{18.61}$$

ここから，次式が見いだされる．

$$\beta(\lambda_{\mathrm{R}}) = \mu \left.\frac{\partial \lambda_{\mathrm{R}}}{\partial \mu}\right|_{\lambda_{\mathrm{B}}} = (d-4)\lambda_{\mathrm{R}}\bigl(1 - \lambda_{\mathrm{R}} B(d)\bigr)$$
$$\approx (d-4)\lambda_{\mathrm{R}} + (N-1)\frac{\lambda_{\mathrm{R}}^2}{48\pi^2} + O\bigl((d-4)^2\bigr) \tag{18.62}$$

最後の式は，N の大きい近似を用いない O(N) 模型による次の式，

$$\beta(\lambda_{\mathrm{R}}) = (d-4)\lambda_{\mathrm{R}} + (N+8)\frac{\lambda_{\mathrm{R}}^2}{48\pi^2} + O(\lambda_{\mathrm{R}}^3) \tag{18.63}$$

と比較すべきである．ここでも N が大きい極限の計算は，通常の摂動的な計算と同様の結果を再現している．

固定点は，

$$\lambda^* = \frac{1}{B(d)} \tag{18.64}$$

に存在する．d が 4 の近傍にあれば，この固定点は，次のように近似できる．

$$\lambda^* \approx \frac{24\pi^2(4-d)}{N} \tag{18.65}$$

より重要なのは，式(18.58)において $\lambda_{\mathrm{R}} = \lambda^*$ と置いたときに，支配的でない 1 次の項は消えることで，この場合，次式が得られる．

$$\sigma_{\mathrm{R}}^2 + \frac{6m_{\mathrm{R}}^2\mu^{d-4}}{\lambda_{\mathrm{R}}} = -(N-1)A(d)\left(\frac{H_{\mathrm{R}}}{\sigma_{\mathrm{R}}}\right)^{\frac{d}{2}-1} \tag{18.66}$$

この方程式に μ^{2-d} を掛けて無次元にしてしまい，次式を通じて無次元のパラメーター g^2 を導入する．

$$\frac{1}{g^2} = -(N-1)A(d) - \frac{6m_{\mathrm{R}}^2\mu^{-2}}{\lambda_{\mathrm{R}}} \tag{18.67}$$

線形 σ 模型の状態方程式は，次のようになる．

$$\bigl(\sigma_{\mathrm{R}}^2 g^2 \mu^{2-d} - 1\bigr) = -g^2(N-1)A(d)\left\{\mu^{2-d}\left(\frac{H_{\mathrm{R}}}{\sigma_{\mathrm{R}}}\right)^{\frac{d}{2}-1} - 1\right\} \tag{18.68}$$

簡単な σ_{R} 場と H_{R} 場の定義を変更 (非線形 σ 模型の場は無次元だが，線形 σ 模型の σ 場は $[\sigma] = M^{\frac{d}{2}-1}$ の次元を持つことを考慮するため) することにより，線形および非線形 σ 模型の状態方程式は同じものになる．

2 つの模型が同じ状態方程式を持つ理由を，図 18.3 によって理解することができる．線形 σ 模型から $(4-\epsilon)$ 次元の β 関数を計算した際に，我々は“赤外安定”な固定点 λ^* を見いだしたが，そこでは λ_{R} を変化させても相転移は起こらない．他

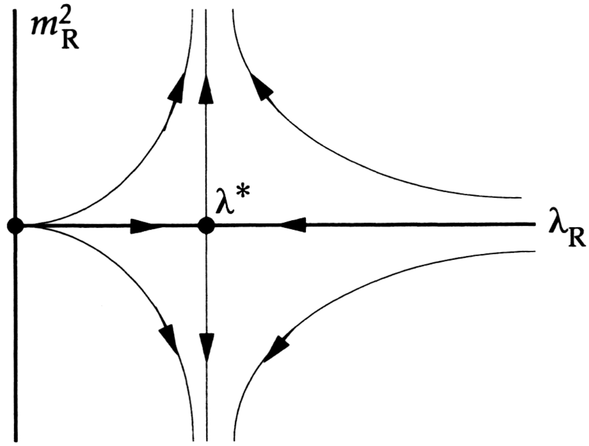


図 18.3 $(4-\epsilon)$ 次元における固定点 λ^* 付近の流れ.

方，非線形 σ 模型では“赤外不安定”(infrared unstable) な固定点があり，対称性を保持した相と対称性の破れた相が分かれている.

我々は両方の場合において，“同一の”固定点を捉えているが，固定点を通る方向を変えているのである．線形 σ 模型の固定点は，λ_R の代わりに m_R^2 を変化させるならば“赤外不安定”となり，m_R^2 を正から負へ移行させると対称性が破れる．したがって非線形 σ 模型で g_R^2 を変化させることは，線形 σ 模型で m_R^2 を変化させ，縦の軌道に沿って固定点 λ_R^* を見ることと等価なのである.

線形および非線形の σ 模型は，N が大きければ正確に同じ物理を記述する．摂動的に繰り込み可能な次元は異なり，自由度の数も異なるにも関わらず，一旦 $\lambda_R = \lambda^*$ と置いて固定点に対して無効な摂動をすべて除くと，両者の物理的予言は同じになる.

これは場の理論の一般的な特徴と考えられる．同一の固定点の流域にある任意の 2 つの理論は，同じ連続極限を持つのである．このような流域は，理論の対称性と時空次元だけから決まるものと，経験的に信じられている.

付 録

A 相対論的状態の規格化

1 粒子状態同士の相対論的に不変な内積の説明をする．計算を簡単に済ませ，本質を理解し易くするために，$1+1$ 次元の変換だけを扱う．

座標系 x から，$+x^3$ 方向に動いている座標系 x' への受動 Lorentz 変換 (passive Lorentz transformation) は，次のように書かれる．

$$\begin{pmatrix} (x')^3 \\ (x')^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^0 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

座標系 x から見た座標系 x' の速度は $v = \tanh s$ である．s は "ラピディティー" (rapidity) と呼ばれるパラメーターで，v とは異なり，ブースト (boost) を合成する際に加法的に振舞う点が便利である．

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cosh(s+s') & -\sinh(s+s') \\ -\sinh(s+s') & \cosh(s+s') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh s' & -\sinh s' \\ -\sinh s' & \cosh s' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.2}$$

このときの速度 v の合成は，次式で表される．

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} \tag{A.3}$$

4 元運動量の反変成分も同様で，" 能動ブースト " (active boost) の下で次のように変換する．

$$\begin{pmatrix} (p')^3 \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^3 \\ E \end{pmatrix} = L(s) \begin{pmatrix} p^3 \\ E \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

静止している粒子 ($p^3 = 0$，$E = m$) が，ラピディティー s へブーストされる場合，

$$(p')^3 = m \sinh s \tag{A.5}$$

$$E' = m \cosh s \tag{A.6}$$

なので，$(E')^2 - (p'^3)^2 = m^2$ である．

相対論的な場の量子論において，Lorentz群は系に付随する“対称性”を表すので，Hilbert空間において作用するLorentz群のユニタリー表現が必要である．これは，次のような合成則を持つユニタリー変換 $U\bigl(L(s)\bigr)$ の群が存在することを意味している．

$$U\bigl(L(s_1)\bigr)U\bigl(L(s_2)\bigr) = U\bigl(L(s_1)L(s_2)\bigr) = U\bigl(L(s_1+s_2)\bigr) \tag{A.7}$$

1粒子状態の規格化が，小さい(非相対論的な)運動量 $\mathbf{p}$ について，

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3 2m\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{A.8}$$

となるように行われるものと仮定する($2m$ を除くと，これは平面波 $\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ の規格化である)．3元運動量 $\mathbf{p}$ を持つ状態を，静止した粒子の状態に対して $\mathbf{0} \to \mathbf{p}$ のブースト $L(\mathbf{p})$ を施すことによって得る．

$$|\mathbf{p}\rangle = U\bigl(L(\mathbf{p})\bigr)|\mathbf{0}\rangle \tag{A.9}$$

x^3 方向のブーストであれば，$L(\mathbf{p})$ は $L(s)$ であり，$p^3 = m\sinh s$ である．これらの状態の内積を計算しよう．s が小さければ，先の結果を適用して次のように書ける．

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3 2m\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = (2\pi)^3 2\,\delta(s-s') \tag{A.10}$$

ここでは恒等式 $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$ を用いた．s が大きい場合については，群の合成則が適用できる．

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \langle \mathbf{0}|\,U^\dagger\bigl(L(s)\bigr)U\bigl(L(s')\bigr)\bigr)|\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}|\,U\bigl(L(s'-s)\bigr)|\mathbf{0}\rangle \tag{A.11}$$

内積は，両者の運動量が一致する場合だけ，ゼロでない値になるべきなので，$s-s'$ が小さいものと仮定しても安全であり，これに非相対論的な結果を適用して，

$$(2\pi)^3 2\,\delta(s-s') \tag{A.12}$$

と評価できる．これは明らかに s と s' に同じ定数が加わるような，2つの状態の同時ブーストの下で不変である．$f(0)=0$ ならば $\delta\bigl(f(x)\bigr) = \bigl(f'(0)\bigr)^{-1}\delta(x)$ なので，デルタ関数の部分を運動量を用いて，

$$(2\pi)^3 2\,\delta(s-s') = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{A.13}$$

と書き直せる．したがって内積は最終的に，次のように表される．

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{A.14}$$

B　場の交換子

次の量を評価してみる．

$$i\Delta(x-x') = \left[\varphi(x), \varphi^\dagger(x')\right] \tag{B.1}$$

それぞれの時刻 x_0 と x'_0 は，一般に異なるものとする．

$$\begin{aligned} i\Delta(x-x') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left(e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}\right) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \operatorname{sgn} k_0\, \delta\left(k^2 - m^2\right) e^{-ik(x-x')} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Δ は，初期超曲面 $x_0 = 0$ における Cauchy 条件を $\Delta = 0$ および $\partial_{x_0}\Delta\big|_{x_0=0} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ と置いたときの，源を含まない Klein-Gordon 方程式 $(\partial^2 + m^2)\Delta = 0$ の解である．

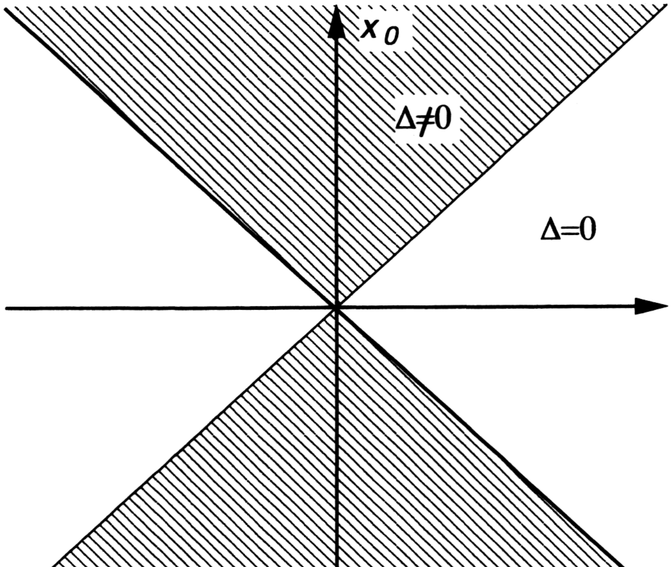


図 B.1　Δ は斜線を施した領域だけで，ゼロ以外の値を取ることができる．

固有 Lorentz 変換 (時間反転を含まない) の下で Δ は不変であり，また $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ である．x が“空間的”(spacelike) であれば，固有 Lorentz 変換によって x を $-x$ へ移すことができるので，$x^2 < 0$ において $\Delta(x) = 0$ である．

x と x' が光速以下の速さの信号によって結ばれないときに，この交換子がゼロになることは，演算子間の非可換性が，一方の観測過程がもう一方の観測を乱すことを表すという，量子力学のコペンハーゲン解釈に整合している．

C 次元正則化

C.1 解析接続と積分

発散する積分が解析接続によって，どのようにして有限な式になるのかを理解するために，よく知られたガンマ関数の例を考察しよう．$\mathrm{Re}\,x > 0$ の領域におけるガンマ関数は，次の積分で定義される．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t} \tag{C.1}$$

x の他の値については，$\Gamma(x)$ は，次の恒等式に従った解析接続によって定義される．

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \tag{C.2}$$

この恒等式は，式(C.1)を積分が収束する領域において部分積分することで導出される．$-1 < \mathrm{Re}\,x < 0$ のときに何が起こるかを考えてみよう．まず，

$$\frac{d}{dt}(t^x e^{-t}) = x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t} \tag{C.3}$$

という式から，次式が得られる．

$$\left[t^x e^{-t}\right]_\epsilon^\infty = x\int_\epsilon^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t} - \int_\epsilon^\infty dt\, t^x e^{-t} \tag{C.4}$$

上式では $t = 0$ 付近の発散を避けるために，積分の下限に切断を導入してある．左辺を評価して x で割ると，

$$-\frac{1}{x}\epsilon^x = \int_\epsilon^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t} - \frac{1}{x}\int_\epsilon^\infty dt\, t^x e^{-t} \tag{C.5}$$

となる．したがって，この x の範囲において，

$$-\frac{1}{x}\epsilon^x = \int_\epsilon^\infty dt\, t^{x-1} \tag{C.6}$$

である．式(C.5)は，次のように書き直される．

$$\frac{1}{x}\int_\epsilon^\infty dt\, t^x e^{-t} = \int_\epsilon^\infty dt\, t^{x-1}(e^{-t} - 1) \tag{C.7}$$

最後の式の右辺は $\epsilon \to 0$ において収束するので，安全にこの極限を取って，次式を得ることができる．

$$\frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}(e^{-t}-1) \tag{C.8}$$

左辺は $\Gamma(x)$ に等しいので，次の結果を得たことになる．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}(e^{-t}-1), \quad -1 < \mathrm{Re}\, x < 0 \tag{C.9}$$

同様に $-2 < \mathrm{Re}\, x < -1$ において，次式が得られる．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}(e^{-t}-1+t) \tag{C.10}$$

このように，元の積分からの解析接続は，積分の中で e^{-t} の Taylor 級数から，積分を収束させるために初めの方の項を差し引いた，新たな積分によって与えられる．

時空次元 d に関して Feynman 積分を接続する場合にも，同様の手続きが現れる．$d^dk \propto k^{d-1}dk$ なので，解析的に接続した積分は，ダイヤグラムに入る被積分関数の運動量に関する Taylor 展開の最初の数項を差し引いたものである．

次元正則化は，あるタイプの積分をゼロにする性質がある．たとえば，

$$\int d^dk\, \frac{1}{k^2+M^2} \tag{C.11}$$

は，式(5.47)により，次式に等しい．

$$\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\left(M^2\right)^{d/2-1} \tag{C.12}$$

M をゼロと置くなら，これは $d>2$ の任意の次元で恒等的にゼロであり，したがって解析接続により任意の d についてゼロである——正の量を積分しており，積分は k が大きいところで発散するのであるが．この矛盾は，解析接続によって得た関数が，もはや元の積分ではなく，何らかの部分を減じた積分によって与えられるという事情を理解することで解消される．

C.2　伝播関数

Euclid 空間の伝播関数に関する，有用な公式をいくつか示す．

まず質量のない場合について，k^2 の一般の冪（べき）の Fourier 変換を考える．

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{ikx}}{|k^2|^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ds \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, s^{\alpha-1}e^{-sk^2+ikx}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ds \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)^d \frac{e^{-x^2/4s}}{(2\pi)^d} s^{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ds\, s^{d/2-\alpha-1} e^{-sx^2/4} \\
&= \frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\frac{\Gamma(d/2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{d/2-\alpha} \qquad \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

この右辺の式は，解釈に注意を要する．$\alpha=-1$ と置くと，k^2 の Fourier 変換を行うことになり，$-\nabla^2$——微分演算子になる！ この右辺は“分布”であり，常に何らかの滑らかな試行関数 $\phi(x)$ と一緒に積分しなければならない．α が負の整数のときの $\Gamma(\alpha)$ の発散と，解析接続における Taylor 係数の出現が相伴って，この積分がどのようにして $\nabla^2\phi(x)$ となるかを調べることは，演習問題として面白い．

質量のないスカラー場の x 空間における伝播関数を得るために，$\alpha=1$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{ikx}}{|k^2|} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{d/2-1}-\ln|x|^2+\dots\right), \quad d\approx 2 \qquad \text{(C.14)} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|x|^2}, \quad d\approx 4 \qquad \text{(C.15)}
\end{aligned}
$$

である．$d=2$ の近傍で現れる極は，赤外発散によるものである．

質量のある場合については，次の積分を評価する．

$$
\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} = \frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\int_0^\infty ds\, s^{-d/2}e^{-x^2/4s-m^2s} \qquad \text{(C.16)}
$$

これは Bessel 関数である．$s=e^t|x|/2m$ と置くと，次のように書ける．

$$
\frac{1}{2^d\pi^{d/2}}\left|\frac{x}{2m}\right|^{1-d/2}\int_{-\infty}^\infty dt\, e^{\left(1-\frac{1}{2}d\right)t-m|x|\cosh t} \qquad \text{(C.17)}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty e^{\left(1-\frac{1}{2}d\right)t-m|x|\cosh t}dt &= \int_{-\infty}^\infty \cosh\frac{\left(1-\frac{1}{2}d\right)t}{2}e^{-m|x|\cosh t}dt \\
&= K_{|1-d/2|}\big(m|x|\big) \qquad \text{(C.18)}
\end{aligned}
$$

となる．修正された Bessel 関数 $K_n(x)$ は，大きい x の下で，次のように振舞う．

$$
K_n(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \quad \text{as} \quad x\to\infty \qquad \text{(C.19)}
$$

D　スピノルと六分儀の原理

ここでは回転群 SO(N) および直交群 O(N) のスピノル表現の基本的な性質を議論する．奇数次元の回転群は，偶数次元の場合より少々難しいので，ここでは主と

して N が偶数の場合だけを考える．スピノルは 1913年に Cartan[1]によって発見された．

D.1　ガンマ行列の構築

まず，任意の N に対して，

$$\{\gamma_n, \gamma_m\} = 2\delta_{mn} \tag{D.1}$$

を満たし，2^N 次元空間において作用するような $2N$ 個の行列一式が存在することを示そう．

$\hat{a}_i$，$\hat{a}_i^\dagger$ $(i = 1, \ldots, N)$ を，$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ 等を満たす Fermi粒子の演算子一式とする．これらの反交換関係は，ベクトル $(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\ldots(\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}|0\rangle$ によって張られる 2^N 次元の Fock空間の表現を持つ．n_i は 0 もしくは 1 である．

次のように γ を定義する．

$$\gamma_{2n} = \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \tag{D.2}$$

$$\gamma_{2n+1} = \frac{1}{i}\left(\hat{a}_n - \hat{a}_n^\dagger\right) \tag{D.3}$$

こうすると γ_n は Hermite行列となり，必要とされる反交換関係を持つ．

$$\{\gamma_n, \gamma_m\} = 2\delta_{mn} \tag{D.4}$$

D.2　基本定理

行列 γ_μ $(\mu = 1, \ldots, 2N)$ が与えられているものとする．次の仕事は，以下の結果を導くことである．

定理： $^\forall R \in \mathrm{SO}(2N)$, $^\exists U(R) \in \mathrm{SU}(2^N)$ such that $U^\dagger(R)\gamma_\mu U(R) = R_{\mu\nu}\gamma_\nu$ (D.5)

議論を動機づけるための具体的な素材として，六分儀 (sextant) を考えてみる．

よく知られたこの道具は，海上の船の揺れる甲板で，水平線からの太陽の高度を測定するのに用いられる．経緯儀やその類の道具は，船上では船の揺れのために役に立たない．六分儀は，角度 θ をなす 2 枚の鏡に続けて反射した光の方向が，結果

[1] Élie-Joseph Cartan：1869 年 4 月 9 日 Dolomieu (フランス) 生まれ．1951 年 5 月 6 日 Parisにて死去．

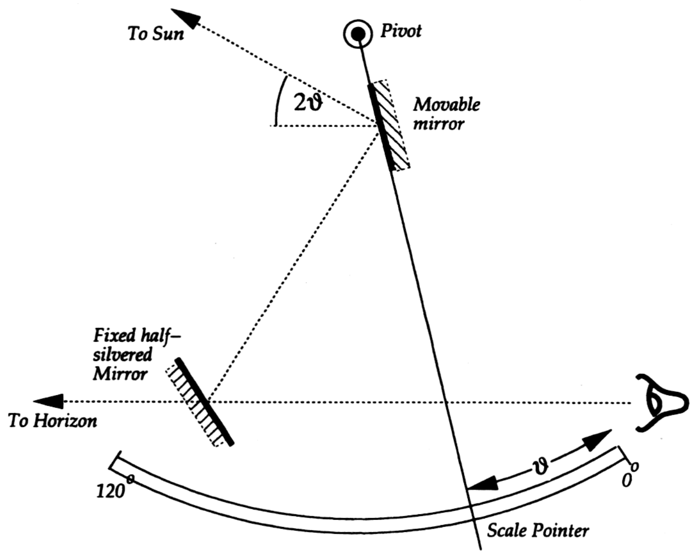


図 D.1　六分儀.

的に鏡の面が交わる直線のまわりを 2θ だけ回転するという性質を利用した道具である．太陽の像が地平線に重なるように鏡の角度を調節するとき，六分儀が揺れても角度の調節に影響はない．これと同じトリックを，回転群 SO$(2N)$ のスピノル表現の構築に用いることができる．

成分が x^μ のベクトル $\mathbf{x}$ が与えられたときに，$x = x^\mu\gamma_\mu$ という量をつくることにする．$\mathbf{n}$ が単位ベクトルであれば，

$$(-\gamma_\nu n^\nu)(x^\mu\gamma_\mu)(\gamma_\sigma n^\sigma) = \big(x^\mu - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})(n^\mu)\big)\gamma_\mu \tag{D.6}$$

は，$\mathbf{n}$ に垂直な平面に反射した $\mathbf{x}$ ベクトルに関する量である．したがって，

$$-(\gamma_1\cos\theta/2 + \gamma_2\sin\theta/2)(-\gamma_1)x(\gamma_1)(\gamma_1\cos\theta/2 + \gamma_2\sin\theta/2) \tag{D.7}$$

は，先に“1”面に反射し，その後に，これに対して $\theta/2$ の角度を持つ面に反射する，連続した 2 回の反射に対応する．これを言い替えると，Clifford代数から導かれるように，

$$(\cos\theta/2 - \gamma_1\gamma_2\sin\theta/2)\,x\,(\cos\theta/2 + \gamma_1\gamma_2\sin\theta/2) \tag{D.8}$$

$$= \gamma_1(\cos\theta x^1 - \sin\theta x^2) + \gamma_2(\sin\theta x^1 + \cos\theta x^2) + \gamma_3 x^3 \ldots \tag{D.9}$$

である．$(\gamma_1\gamma_2)^2 = -1$ を用いると，次のように書き直せる．

$$e^{-i\frac{1}{4i}[\gamma_1,\gamma_2]\theta} x^\nu \gamma_\nu e^{i\frac{1}{4i}[\gamma_1,\gamma_2]\theta} = x^\nu R_{\nu\mu}\gamma_\mu \tag{D.10}$$

R は 1-2 面内の角度 θ の $N \times N$ 回転行列である．この構成によって“任意の”回転を実施できることは明らかである．回転を生成もしくは合成する鏡の扱いは Misner, Thorn and Wheeler の大部な専門書 *Gravitation* の付録において議論されている．

D.3　カイラリティー

2^N 空間 $\mathcal{H}$ は，SO$(2N)$ の下で“既約”ではない——SO$(2N)$ の生成子，

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{4i}[\gamma_i, \gamma_j] \tag{D.11}$$

は，粒子数 $F = \sum \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$ が奇数でも偶数でも保存するので，全空間を左と右の“カイラリティー”を持つ不変な部分空間の直和へ分解できる．

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{odd}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{even}} \tag{D.12}$$

これらの 2 つの空間を区別する演算子 $(-1)^F$ は，γ_μ と反交換し，Γ_{ij} と交換し，$\gamma_{2N+1} = -(i)^N \prod_\mu \gamma_\mu$ と書ける．これは高次元における $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ の類似物である．反転を含む，より大きい群 O$(2N)$ の下で，$\mathcal{H}$ は既約である．何故なら，ひとつの γ_n が“粒子”数を奇数から偶数へ変えて $\mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}$ へと移す，等の作用を持つからである．

γ_{2N+1} を他のガンマ行列に含めることで，$2N+1$ 次元の回転を実行することができる——しかしこのときカイラリティーはなく，つけ加えたガンマ行列は，半端な余りとなる．この半端な γ_{2N+1} のために，奇数次元の回転群の Dynkin ダイヤグラムは違ったものになる——D_n ではなく，Cartan 列 B_n に属する．このことの物理的な説明については H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* を参照されたい．

D.4　Spin$(2N)$, Pin$(2N)$, SU$(N) \subset$ SO$(2N)$

双一次の $\hat{a}_i^\dagger a_j$ は Lie 代数 U(N) を張り，これも 2^N 次元空間 $\mathcal{H}$ において作用する——しかし“粒子”の数は保たれる．したがって $\mathcal{H}_{\mathrm{odd/even}}$ は更に，それぞれ U(N) および SU(N) の下で不変な $N+1$ 個の部分空間に分解される．SU(N) は SO$(2N)$ の部分空間であり，この分解は，部分空間を限定した表示空間分解の例である．

$\frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ を指数に用いて得られる群は $SU(2^N)$ の部分群であり，回転群と同じLie代数を持つ——しかし O(3) 群の例から類推されるように，同型 (isomorphic) ではなく，$SO(2N)$ の "2 重覆" (double cover) となる．これを $Spin(2N)$ と呼ぶ．反転を含めると，$O(2N)$ の "2 重覆" である $Pin(2N)$ が得られる．

E　不定計量

Lorentzゲージを用いた電磁場を量子化する際に現れる，不定計量Hilbert空間の詳細を示す．ここでは z 方向に伝播する単一モードの平面波を扱う．連続規格化をあらわに扱わず，次の仮定を置く．

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = 1, \quad i = 1, 2, 3 \tag{E.1}$$

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = -1 \tag{E.2}$$

これらの演算子は，不定計量の内積 $\langle a|b\rangle$ を持つ "Hilbert空間" において作用する．特に $\hat{a}_0^\dagger$ は負の自乗ノルムを持つ状態を生成する．不定計量の性質により $\langle\chi|\chi\rangle = 0$ であっても，それは必ずしも $|\chi\rangle = 0$ を意味しない．しかしながら，この内積は "非縮退" である——総ての状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ に関して $\langle\psi|\chi\rangle = 0$ となるような任意の状態 $|\chi\rangle$ は，ゼロでなければならない．

内積の非縮退性は重要である．ある演算子の共役演算子や，Hermite演算子の概念は，内積の決め方に依存する．$A : V \to V$ が複素内積空間 V における演算子であると仮定しよう．共役演算子 $A^\dagger$ を定義するために，それぞれの $y \in V$ に関して，

$$f(x) = (y, Ax) \tag{E.3}$$

と与えられる線形汎関数 $f : V \to \mathbf{C}$ を考えよう．(x, y) は (必ずしも正定値ではない) 内積を表す[2)]．$z \in V$ の要素で，

$$f(x) = (z, x) \tag{E.4}$$

を満たすものが存在するならば，y は $A^\dagger$ の作用域 (domain) にあると言い，

$$z = A^\dagger y \tag{E.5}$$

と置く．もし内積が縮退しているならば，z を一意的に決めることができず，$A^\dagger$ を定義できない．

2) ここでは標準的な内積の表記法を用いなければならない．Diracの記法 $\langle\psi|A|\chi\rangle$ は簡潔に過ぎ，$\big(|\psi\rangle, A|\chi\rangle\big)$ と $\big(A^\dagger|\psi\rangle, |\chi\rangle\big)$ の区別をしていない．

我々が扱う単一モードに関して，

$$(\partial^\mu A_\mu)^+|\text{physical}\rangle = 0 \tag{E.6}$$

という物理的状態の条件は，

$$(\hat{a}_0 + \hat{a}_3)|\text{physical}\rangle = 0 \tag{E.7}$$

となる．次の制約を加えることはできない．

$$(\hat{a}_0^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)|\text{physical}\rangle \overset{\text{wrong!}}{=} 0 \tag{E.8}$$

これは，この式が (E.7) と整合しないからではなく，$(\hat{a}_0^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)|\psi\rangle = 0$ を満たす状態が存在しないからである．この半分の制約だけで，どのように $\partial^\mu A_\mu$ が (ある意味で) ゼロになるのかを考えてみよう．

次の演算子を，新たに定義する．

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_3 + \hat{a}_0), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_3^\dagger + \hat{a}_0^\dagger), \\ \hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_3 - \hat{a}_0), \quad \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_0^\dagger) \end{aligned} \tag{E.9}$$

そうすると，

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{E.10}$$

であり，また $[\hat{a}, \hat{a}]$，$[\hat{a}, \hat{b}]$ などはゼロである．真空状態 $|0\rangle$ がひとつ存在し，それは $\hat{a}|0\rangle = \hat{b}|0\rangle = \hat{a}_{1,2}|0\rangle = 0$ および $\langle 0|0\rangle = 1$ を満たすものと仮定する．それから $\hat{a}_{1,2}^\dagger$，$\hat{a}^\dagger$ および $\hat{b}^\dagger$ の冪(べき)を $|0\rangle$ に作用させてFock空間表示をつくる．

物理的な部分空間は，

$$\mathcal{H}_{\text{physical}} = \left\{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} \;\middle|\; \hat{a}|\psi\rangle = 0 \right\} \tag{E.11}$$

である．これは直和に分解される．

$$\mathcal{H}_{\text{physical}} = \mathcal{H}_{\text{transverse}} \oplus \mathcal{H}_{\text{null}} \tag{E.12}$$

$\mathcal{H}_{\text{transverse}}$ は，真空に $\hat{a}_{1,2}^\dagger$ の冪を作用させて作られる状態によって張られる．また $\mathcal{H}_{\text{null}}$ は，$\hat{a}_{1,2}^\dagger$ の冪と，$\hat{a}^\dagger$ の“1乗以上の”冪を真空に作用させて作られる状態で，$\hat{b}^\dagger$ は含まない ($\hat{b}^\dagger$ によって作られる状態は，$\hat{a}$ によって消滅させることができない)．

任意の $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{null}}$ の状態は，$\mathcal{H}_{\text{physical}}$ に属する任意の状態と直交する (自分自身とも直交する)．言い替えると，

$$\big\langle \text{physical}\big|\text{null}\big\rangle = 0 \tag{E.13}$$

であり，重なりを計算するとき，これらの状態は実効的にはゼロである．物理的な予言に関しては，null状態だけ異なる 2 つの状態は識別可能である．$\hat{a}^\dagger$ が任意の物理的状態に作用すると，ひとつの null状態ができることに注意されたい．したがって $\hat{a}^\dagger$ は実効的にゼロ演算子である．

観測可能な量に対応する任意の演算子は，物理的な部分空間をそれ自身に写像しなければならない．ハミルトニアン，

$$\hat{H} = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0) \tag{E.14}$$

が，この性質を持つことを，簡単に確認することができる．場の強度のテンソル成分も，当然同じ性質を持つ．

F　フォノンと運動量

ある流体中の音波が，速度ポテンシャル，

$$\theta = A\frac{1}{k}\sin(kx - \omega t) \tag{F.1}$$

によって決まると仮定しよう．速度場 $v = \nabla\theta$ は，

$$v = A\cos(kx - \omega t) \tag{F.2}$$

と与えられる．連続の方程式 $\partial_x \rho v + \partial_t \rho = 0$ を用い，$\rho = \rho_0 + \delta\rho$ と置き，$\rho v \approx \rho_0 v$ と近似すると，次式が得られる．

$$\delta\rho = \frac{1}{\omega}\rho_0 k A\cos(kx - \omega t) + O(A^2) \tag{F.3}$$

したがって，運動量密度 ρv の時間平均は，$O(A^3)$ までの精度で，次のように与えられる．

$$\langle \rho v \rangle = \langle \delta\rho v \rangle = \frac{k\rho_0}{\omega}\frac{1}{2}A^2 \tag{F.4}$$

運動エネルギー密度の時間平均も，同様にして求まる．

$$\left\langle \frac{1}{2}\rho_0 v^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\rho_0 A^2 \tag{F.5}$$

すべての調和振動子について，ポテンシャルエネルギーの時間平均と運動エネルギーの時間平均は等しいので，全エネルギーは次のように表される．

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}\rho_0 A^2 \tag{F.6}$$

波はエネルギー $\hbar\omega$ のフォノンによって構成されるので，フォノン数密度は，

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\hbar\omega}\langle E \rangle = \frac{1}{2\hbar\omega}\rho_0 A^2 \tag{F.7}$$

である．したがって 1 フォノンあたりの運動量は，

$$\frac{1}{\langle n \rangle}\langle \rho v \rangle = \frac{k\rho_0}{\omega}\frac{1}{2}A^2\left(\frac{1}{2\hbar\omega}\rho_0 A^2\right)^{-1} = \hbar k \tag{F.8}$$

となる．これは一般原理から予想されることである．

$\langle \rho v \rangle$ は，運動量密度と質量流 (mass-current) の 2 つの役割を担う．運動量密度の平均がゼロでないことは，波としての前後への動きに加え，波の伝播方向への定常的な粒子の流れがあることを意味する．このことは，$v = A\cos(kx - \omega t)$ をラグランジアンの考え方，すなわち流体を構成する粒子の運動方程式として解釈することにより確認できる．粒子の軌道 $x(t)$ は，次の運動方程式の解である．

$$\frac{dx}{dt} = A\cos(kx - \omega t) \tag{F.9}$$

x が微分項と余弦項の両方に現れるので，これは非線形方程式である．解を，

$$x(t) = x_0 + Ax_1(t) + A^2 x_2(t) + \ldots \tag{F.10}$$

のように置いて，摂動的に解くと，まず，

$$x_1(t) = -\frac{1}{\omega}\sin(kx_0 - \omega t) \tag{F.11}$$

が得られる．これを式(F.9)に代入すると，

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k}{\omega}\sin^2(kx_0 - \omega t) \tag{F.12}$$

となる．したがって $\dot{x}_2$ は有限の時間平均 $k/(2\omega)$ を持ち，定常的な流れの成分を与える．これは式(F.4)と整合する．

結晶中のフォノンが，正味の Newton 運動量を持たないことを示してみよう．第 1 章を思い起こすと，結晶中の原子の変位は，

$$\eta_n = A\cos\big(k(na) - \omega t\big) \tag{F.13}$$

であり，結晶において式(F.9)に相当する式は，

$$\frac{d\eta_n}{dt} = A\cos\big(k(na) - \omega t\big) \tag{F.14}$$

と与えられる．η は式(F.14)の右辺には現れない．これは線形の方程式なので，正味の粒子流は生じない．

実際の状況は，これよりも少し複雑である．流体力学の方程式は非線形であり，音波 (F.1) は線形化した方程式の解であるに過ぎない．流体の音波と結晶の音波の違いは A の 2 次で，両方の波には，運動方程式の 2 次の効果による補正がある．通常の流体における音波場において，ゼロでない $\langle \delta\rho\mathbf{v} \rangle$ によって生じる質量の流れは，より大きな流体のバルク的な流れによって隠される．このような定常的な流れは“吸音的流れ”(acoustic streaming) として知られており，Rayleigh が最初に研究したものであるが，この流れは音波の運動量を背景の流れへと移す“摩擦”(friction) の効果によって生じる．散逸が無くとも，平均的な流れに対し，典型的に $O(A^2)$ の反対向きの流れが生じ，それは波そのものと同じだけの運動量を運ぶ．二流体の描像において，反対向きの流れは，音波によって引き起こされるけれども音波自身への運動量の寄与には含めず，代わりに超流動成分の運動量と見なして $\nabla\cdot(\rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n) = 0$ の関係を成立させるのである．

G　量子力学における行列式

作用の 2 次の部分に現れる演算子の行列式は，1 ループの効果をすべて含み，1 ループ有効作用と呼ばれることがある．これらの行列式の評価は重要である．一般に行列式は近似的にしか評価できないが，量子力学 (1 次元の場の理論と等価である) では，しばしば行列式を正確に評価でき，興味深い結果が得られる．

Schrödinger 型の演算子，

$$T = -\partial_x^2 + V(x) \tag{G.1}$$

を，区間 $[a, b]$ において考え，次の量を計算してみる．

$$D(\lambda) = \mathrm{Det}(T - \lambda) \tag{G.2}$$

$D(\lambda)$ は，積 $\prod_i(\lambda_i - \lambda)$ のような性質を持つ正則関数で，λ が T の固有値に一致するときに必ずゼロになる整関数 (entire function) でなければならない．T の固有値は a と b において固有関数に課される境界条件に依存するので，行列式も境界条件に依存する．最も単純なのは“Dirichlet の境界条件”$y(a) = y(b) = 0$ を課する場合である．

簡単な例として，振動数が ω の調和振動子を考察しよう．区間 $[0, T]$ において，

$$D = \mathrm{Det}(-\partial_x^2 + \omega^2) \tag{G.3}$$

を考える．固有関数は，次のように与えられる．

$$y_n(x) \propto \sin\frac{n\pi x}{T} \tag{G.4}$$

固有値は，

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} + \omega^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{G.5}$$

なので，行列式は次のようになる．

$$\mathrm{Det}(-\partial_x^2 + \omega^2) \;\to\; \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2} + \omega^2\right) \tag{G.6}$$

これは発散するが，異なる ω^2 の値に対する 2 つの行列式の比は有限である．たとえば次のようになる．

$$\frac{\mathrm{Det}(-\partial_x^2 + \omega^2)}{\mathrm{Det}(-\partial_x^2)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{1}{\omega T}\sinh\omega T \tag{G.7}$$

次のように示される，奇妙な事実に注目しよう．

$$\frac{\mathrm{Det}(-\partial_x^2 + \omega^2)}{\mathrm{Det}(-\partial_x^2)} = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\omega}\sinh\omega T = \frac{y_\omega(T)}{y_0(T)} \tag{G.8}$$

$$(-\partial_x^2 + \omega^2)y_\omega(x) = 0, \quad y_\omega(0) = 0,\ y'_\omega(0) = 1 \tag{G.9}$$

この関係は一般に成立する．このことを見るために，次の初期値問題の下での $y(x)$ を考えよう．

$$(T - \lambda)y_\lambda = 0, \quad y_\lambda(a) = 0, \quad y'_\lambda(0) = 1 \tag{G.10}$$

λ は $y_\lambda(b) = 0$ のときの，T のひとつの固有値である．したがって $y_\lambda(b) = 0$ は，$D(\lambda)$ がゼロになるところと一致する．更に Poincarè の常微分方程式に関する定理により，$y_\lambda(x)$ は行列式と同様に λ の整関数である．それらの関数は $\lambda \to \infty$ において同じ挙動を示し，関数同士の比は完全な有界関数，すなわち定数になることを簡単に示すことができる．したがって，ある (発散する) 定数 C を用いて，$D(\lambda) = Cy_\lambda(b)$ と表すことができる．これで次の定理を証明したことになる．

定理： T_1 が領域 $\mathcal{D}(T_V) = \{\, y \in L^2[a,b] \mid y(a) = y(b) = 0 \,\}$ における微分演算子 $-\partial_x^2 + V_1(x)$ であり，T_2 もポテンシャル V_2 を持つ同様の演算子とする．関数 $y_1(x;\lambda)$ を，次のように定義する．

$$(T_1 - \lambda)y_1 = 0, \quad y_1(a;\lambda) = 0, \quad y'_1(a;\lambda) = 1 \tag{G.11}$$

$y_2(x;\lambda)$ も同様に定義する．そうすると，次式が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{Det}(T_1-\lambda)}{\mathrm{Det}(T_2-\lambda)}=\frac{y_1(1;\lambda)}{y_2(1;\lambda)} \tag{G.12}$$

もうひとつ別の証明方法を示すことも価値があろう．これは微分演算子 T を間隔 a の格子上の離散的近似に置き換える方法である．関数 $y(x)$ をベクトル y_i に置き換え，微分を最も単純な有限差分に置き換える．

$$(T-\lambda)y \ \rightarrow\ \tilde{T}y_i=-\frac{1}{a^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})+(V_i-\lambda)y_i \tag{G.13}$$

そうすると，微分方程式 $(T-\lambda)y=0$ が 3 項間の漸化式となり，これは元の微分方程式と同様に，2 つの線形独立な解を持つ．条件 $y'(0)=1$ は，ここでは $y_1=a$ となる．n 個の離散点を持つ区間において，$n\times n$ の有限な行列，

$$\tilde{T}_n=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 2+a^2(V_n-\lambda) & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2+a^2(V_{n-1}-\lambda) & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2+a^2(V_{n-2}-\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{G.14}$$

の行列式を考え，$\tilde{T}$ を $D_{n+1}(\lambda)$ で表す．

最初の列に関する行列式を展開すると，次式を得る．

$$-\frac{1}{a^2}(D_{i+1}-2D_i+D_{i-1})+(V_i-\lambda)D_i=0 \tag{G.15}$$

したがって，行列式は離散Dirichlet問題の解と同じ漸化式を満たす．λ が離散方程式の固有値のひとつであるときにゼロになるべき量は，格子端のひとつ向こう側 (これが行列式の添字のシフト $n\rightarrow n+1$ が生じる理由である) の漸化式の解である．格子間隔を狭めると，離散問題の解は微分方程式の解に近づき，定理が証明されることになる．

参考図書(訳者補遺)

有用な参考文献 (和書) を，本書「量子場の物理」の内容との関連に重点をおいて紹介する．

A．場の量子論

[A1] 九後汰一郎：新物理学シリーズ23「**ゲージ場の量子論 I**」培風館, 1989年, A5判 272頁．新物理学シリーズ24「**ゲージ場の量子論 II**」培風館, 1989年, A5判 284頁．

[A2] 藤川和男：現代物理学叢書「**ゲージ場の理論**」岩波書店, 2001年, A5判 256頁．

[A3] ベレステツキー, リフシッツ, ピタエフスキー (井上健男訳)：ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程「**相対論的量子力学１**」東京図書, 1969年 (原書1968年), A5判 520頁．リフシッツ, ピタエフスキー (井上健男訳)：ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程「**相対論的量子力学２**」東京図書, 1973年 (原書1971年), A5判 290頁．

[A4] 中西襄：新物理学シリーズ19「**場の量子論**」培風館, 1975年, A5判 329頁．

[A5] 中西襄：パリティー物理学コース クローズアップ「**ファインマン・ダイヤグラム**」丸善, 1993年, A5判 117頁．

現代的な‘場の量子論’のテキストとしては [A1] と [A2] がある．既存の成書の中には，本書「量子場の物理」と同じタイプの本は見当たらないが，本書と内容の重なる部分が比較的多い和書を強いて挙げるならば [A1] になるであろう．この本では，著者の九後が，1978年に小嶋泉と共同でBRS対称性を用いて定式化した一般的な共変正準形式に基き，通常のゲージ場各論よりも一段高いレベルから統一的に見通しのよい場の理論全般の解説を行っている (理論構成上‘見通しがよい’ということであって，初学者が馴染みやすいという意味ではないが)．[A1] で言及のない話題はT行列, 非相対論的多体系, 離散的な場と模型 (格子場・Ising模型など), 臨界現象, 1/N展開といったところである．[A2] は標準模型的なゲージ理論の視点から簡潔に場の量子論をまとめた教科書．章の分け方が，ゲージ対称性/量子電磁力学/Yang-Mills場/QCD/弱電磁統一理論/‥のようになっていて，本全体の構成は分かりやすい．全般に題材を厳しく制限してあるが，Yang-Mills場の解説においてBRST超場 (超対称性)，QCDの解説において格子ゲージ理論 (格子場) への言及がある．

[A3] と [A4] は演算子形式だけに基いている (径路積分を使わない) という意味で古いタイプの教科書である．[A3] が量子論と素粒子物理の歴史的な経緯を色濃く反映した‘伝統的な’教科書の典型であるのに対し，[A4] は対象を量子電磁力学に限定し，演算子形式の範囲内で公理論的に‘場の量子論’をまとめてある (著者の中西と B. Lautrup が1966-7

年に定式化した任意ゲージでのB場共変正準形式の解説を含む). 粒子の散乱・崩壊現象の扱い方や, S行列・T行列に関する基礎的な話題, 伝統的なFeynmanダイヤグラム法の議論などについては, まずはこれらのようなタイプの文献を参照するのがよいだろう.

[A5] では簡潔にFeynmanダイヤグラム法のエッセンスを紹介してある.

B. 径路積分形式・繰り込み群の方法

[B1] 崎田文二, 吉川圭二:物理学選書「**径路積分による多自由度の量子力学**」岩波書店, 1986年, A5判 181頁.

[B2] 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏太郎:現代物理学叢書「**経路積分の方法**」岩波書店, 2000年, A5判 230頁.

[B3] 江沢洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎晴明:現代物理学叢書「**くりこみ群の方法**」岩波書店, 2000年, A5判 256頁.

[B4] ゲプハルト, クライ (好村滋洋訳):物理学叢書62「**相転移と臨界現象**」吉岡書店, 1992年 (原書1980年), A5判 362頁.

[B1] と [B2] は径路積分法を解説した文献である. [B1] はEuclid化しない元来の形式, [B2] はEuclid化した形式を用いている. Bose系/Fermi系の径路積分, 有効作用などに関しては, これらの文献が参考になる. [B1] では最終章でσ模型の1/N展開が取り上げられており, [B2] では格子場に関する言及がある.

[B3] は統計力学的な繰り込み群と, 場の理論における繰り込み群の双方を扱った, 繰り込み群の方法全般に関する解説書である. 分担執筆のため内容的に統一がとれているとは言い難いが, 間口の広い繰り込み群の文献として有用な本である.

[B4] は臨界現象を扱った専門書である. 主として凝縮系への具体的な応用を想定し, 本書とはかなりスタンスの異なる記述がなされているが, 最後の繰り込み群の章ではセル・スピン (ブロックスピン), ϵ展開, 1/N展開に言及してある.

C. 多体系など

[C1] アブリコソフ, ゴリコフ, ジャロシンスキー (松原武生, 佐々木健, 米沢富美子訳):「**統計物理学における場の量子論の方法**」東京図書, 1970年 (原書1962年), A5判 420頁.

[C2] リフシッツ, ピタエフスキー (碓井恒丸訳):「**量子統計物理学**」岩波書店, 1982年 (原書1978年), A5判 460頁.

[C3] ザゴスキン (樺沢宇紀訳):「**多体系の量子論 技法と応用**」シュプリンガー東京, 1999年 (原書1998年), B5変判 273頁.

[C4] フェッター, ワレッカ (松原武生, 藤井勝彦訳):「**多粒子系の量子論 理論編**」マグロウヒルブック, 1987年 (原書1971年), A5判 373頁. 「**多粒子系の量子論 応用編**」マグロウヒルブック, 1987年 (原書1971年), A5判 255頁.

[C5] 高橋康:新物理学シリーズ16「**物性研究者のための場の量子論 I**」培風館, 1974年, A5判 211頁. 新物理学シリーズ17「**物性研究者のための場の量子論 II**」培風館, 1976年, A5判 262頁.

[C6] ザイマン (樺沢宇紀訳):「**現代量子論の基礎**」丸善プラネット, 2000年 (原書1969年), A5判 301頁.

[C1] から [C4] までは，場の量子論の方法 (主に演算子形式) の，非相対論的多体系への応用を扱った文献である．[C1] と [C2] は Landau 門下の研究者達によって書かれた教科書．[C1] は書かれた年代は古いが，基本的な部分がしっかりとまとめられており，この分野における名著とされる．これに比べて [C2] は具体的な超流動，超伝導，磁性などへの応用に少し重点を移した構成を持つ．[C3] は対象を固体電子系に限定し，この種の本としては頁数を少なく抑えた最近の教科書．[C4] は大部な本であるが，基礎から広範囲の応用までを丁寧に記述した，レベルの高い専門書として定評がある．

[C5] はタイトルに '物性研究者のための' とあるが，著者は素粒子系の場の理論の研究者 (Ward 恒等式を一般化した高橋康) であって，この本は，通常とは少々異なる観点から演算子形式の場の量子論を扱った教育的な入門書と見ることができる．Bogoliubov 変換と素励起，Goldstone の定理，繰り込み理論・繰り込み群などについて述べられている考え方は参考になる．

[C6] は素粒子系の理論にも一定の関心を持つ物性論の理論家が書いた '場の量子論' (多体問題を含む) の入門書であり，物性論にも関心を持つ素粒子系の理論家によって書かれている本書とは表裏のような関係にある．素粒子系と物性系の話題にほぼ均等に比重を置いて，細かい数式の議論にとらわれずに 1960 年代までの演算子形式を主体とする '場の量子論' とその応用を概観するのによい．

D．素粒子物理概論

[D1] 坂井典佑：物理学基礎シリーズ 10「**素粒子物理学**」培風館, 1993 年, A5 判 277 頁.

[D2] 益川敏英：パリティブックス「**いま、もう一つの素粒子論入門**」丸善, 1998 年, A5 判 165 頁.

[D3] 南部陽一郎：ブルーバックス「**クォーク第 2 版／素粒子物理はどこまで進んできたか**」講談社, 1998 年, 新書判 316 頁.

[D4] 和田純夫：ブルーバックス「**場の量子論とは何か／統一理論へ近づくための根本原理**」講談社, 1996 年, 新書判 200 頁.

本書では量子電磁力学以外の素粒子物理について直接の言及があるわけではないが，結局のところ場の量子論と素粒子物理は不可分の関係にあるので，入門レベルでおおまかに素粒子物理の全体像を掴んでおくことも必要であろう．ここでは，場の量子論の技術的側面には深入りせずに素粒子物理を概観できる適当な参考書を挙げてみた．[D1] は標準模型的な観点で書かれたスタンダードな素粒子物理の教科書．[D2] は頁数は少ないが，場の理論とゲージ原理の基本的な理論構造の解説に力点を置いた密度の濃い入門書である．

[D3] と [D4] は数式をあまり用いていない一般向けの本であるが，最初に読む入門書としては，この手合いの本が有用だと思う．[D3] はタイトルは「クォーク」だが，弱い相互作用や電弱統一理論，大統一の試み等にも触れている素粒子物理全般の解説書であり，かなり専門的な概念まで丁寧に解説してある (ひもモデルや南部-Goldstone 波など，この著者自身が提唱した概念の解説も随所に見られる)．[D4] では専門的な記述を極力控え，標準的な一般啓蒙書のレベルで，場の量子論に基づく素粒子論的世界観を紹介してある．

訳者あとがき

「場の量子論」を標準的な「量子力学」の延長線上に位置づけるならば，その入門編の内容としては，演算子形式を用いた量子電磁力学の概論を取り上げるのが無難な線であろう．量子電磁力学は，場の量子論として最初に確立した標準的な理論であり，場の演算子化の基本的な手法の習得は，物理学に携わる者にとって不可欠なことである．演算子形式を基調とする量子電磁力学の優れた教科書や入門書が 1960 年代までに書かれ，それらによって場の量子論の講義の伝統的なスタイルが確立した．その後も記述がより洗練され，他の相互作用の解説が補足されるといった変化はあっても，基本的には'60年代までに確立されたスタイルを踏襲した初等的な教科書が書かれ続け，標準的な入門コースの内容として定着してきた (もちろん違うタイプの本も書かれてきたが，おそらくそれらは一般的な入門書として使えるものではなかった)．

しかし量子電磁力学が一応の完成を見た後も，場の量子論は様々な新しい概念を取り入れながら発展を続けており，場の量子論の全体像を見渡すと，ひと昔前とは随分様子が違ってきている部分も少なくない．大局的な傾向としては，たとえば (1) 素粒子系の理論において，演算子形式に比べ，径路積分形式の重要性が相対的に著しく高まったこと，(2) 素粒子物理と凝縮系物理を統合的に深化させるような新しい概念 (対称性の自壊や繰り込み群など) が発達し，場の理論の基本的な捉え方が変質してきたことなどが挙げられよう．したがって，これらの話題を安易に上級コースや，別の専門書による自習に譲るのではなく，入門コースの講義にも適切に反映させて，現代的な場の量子論の様相を大所高所から提示しなければならないという考え方もあり得る．本書はこのような意図に沿ってまとめ上げられた，新しい場の量子論の入門用テキストである．

本書の内容は，まず演算子形式に基いて場の量子論の基礎事項をエレガントに概観し (1 − 8 章)，凝縮系に関係した話題 (9 − 11 章) を扱った後で，後半では Euclid

化した径路積分形式を導入し，自発的な対称性の破れとGoldstoneボゾン，超対称性，格子場，繰り込み群，1/N展開といった1960-70年代以降に発展した諸概念を紹介する (12 − 18章) という構成になっている．これだけ多岐にわたる題材を穏当なページ数にまとめ上げた現代的な場の量子論の入門書は，今のところ本書が唯一のものと言ってもよいと思う．もっとも各題材の取捨選択の仕方については，いろいろな見地から異論もあり得るであろうが (原理としての局所ゲージ対称性に全く言及していない点などは，必ずしも万人を納得させる行き方ではあるまい) それでも，このM. Stoneによる新しい入門書は，場の量子論の入門コースの在り方に一石を投じ，少なからず影響を与えてゆくことになると思う．

本の翻訳というのは長丁場の仕事であって，私の場合，自由に使える時間を最大限に充てても，この手の物理書をサイドワークとして一冊訳すのに，1年以上 (索引作成・最終推敲までを含めて15箇月程度) かかる．したがって初めに出版社との間で，1年以上先の原稿引き渡し期日を取り決めて翻訳作業に取りかかることになるが，それだけの期間にわたり，仕事の質を一定に維持し続けて，良心的に訳者としての責任を全うするのは容易なことではない．英語のような屈折語で書かれた文章を，日本語のような膠着語に移し代えるときには，少し気を緩めると取り留めのない文章が出来てしまうし，内容的にも抽象的な理論を扱っているので，訳文の中で論理的なミスを犯す恐れも常にある．共訳者や監修者を設けずに全訳を実施する以上，訳稿の不備はすべて私一人の責任に帰することになる．この翻訳は私にとって4冊目のものであったが，今回は体調がすぐれないこともあって，翻訳作業が予定よりも遅れがちになり，途中で随分苦しい局面もあった．

民間会社の者がこのような本の翻訳を手がけるのは，おそらくあまり他に例のないことであろう．しかし広い視野を持って考えるならば，物理学的な物の考え方は，産業技術全般を支える基礎体力のようなものであり，本当は軽視されてはならないはずである．もともと私は，物理書に関しては良書の出版を待ち望んでいるユーザー (読者) 側の人間であったわけで，自分自身が持続的に翻訳出版の仕事に関与することになろうとは思っていなかったのであるが，このような成り行きも，よくよく考えてみると，日立製作所が私に与えてきた処遇によって生じた必然的な経過と言えないこともない．私の勤務先は来月から社内の他の関連部署とともに日立製作所から分かれて商社に融合し，新会社「(株) 日立ハイテクノロジーズ」の一部となるが，この新会社が高い潜在力を保持し，柔軟に多方面へ社会貢献のできる会社になっていくことを願いたい．最後に日頃世話になっている那珂事業所の方々，とりわけ私のスタンスに一定の理解を示してくれる，良識ある幹部の諸兄ならびに同僚

諸氏に対して，末筆ながら深く感謝の意を表するものである．

2001年 9月
茨城県ひたちなか市にて

樺沢宇紀

索引

<あ>
アイソスピン, 20
Abrikosovの渦糸, 149
イオン・プラズマ振動数, 128
異常次元, 248
Ising模型
　1次元—, 228
　2次元—, 232
1粒子既約(1PI)グラフ, 186
1粒子密度行列, 114
Wick回転, 62
Wickの定理, 33
Wilson-Fisher固定点, 243
Wilsonフェルミオン, 224
Ward恒等式, 103
渦糸, 144, 148
宇宙定数, 11
Vlasov方程式, 116
運動学的不変量, 48
液体ヘリウム3 (^{3}He), 126
液体ヘリウム4 (^{4}He), 131
S行列, 41
s チャネル, 48, 58
1/N展開, 267
ϵ 展開, 266
f 値の総和則, 75
LSZ簡約公式, 76
円偏光, 98
Euler方程式, 150
Ouroborosダイヤグラム, 64, 187, 214
音波(Bose粒子系の—), 138, 142

<か>
Kahler-Diracフェルミオン, 225
解析性, 56
カイラリティー, 85
カイラル表示, 85
Gauss積分, 172, 174, 198
Gauss模型, 244
角度分解光電子放出, 114
Casimirエネルギー, 11
Galilei変換, 144, 208
カレント代数, 23
Campbell-Baker-Hausdorffの公式, 21
ガンマ関数, 280
ガンマ行列, 82, 283
擬運動量, 26, 39
希薄なBose気体, 136
既約な結節部分, 104
吸収部分, 55
キュムラント, 180
境界的な摂動, 236
共鳴, 49, 59
局所的変換, 22, 188
空孔, 88
Cooper対(つい), 147, 208
Gupta-Bleuler形式, 95
Klein-Gordon方程式, 14
クラスター分解性, 135
Grassmann数, 195
Green関数, 32, 37, 173
　—と外源場, 179
　—の解析性, 56
　n 点—, 70
　径路積分と—, 170
　格子場の—, 210
　Schrödinger方程式の—, 113
　電磁ポテンシャルの—, 98
　熱方程式の—, 156
繰り込み可能, 236
繰り込み群, 233
繰り込み群方程式, 248
　1次元Ising模型と—, 232
　Gauss模型と—, 247
　σ 模型と—, 255, 257, 270
繰り込み点, 245
繰り込み不可能, 27, 236, 242
Clifford代数, 82
Gross-Pitaevskii方程式, 147
径路積分, 161
ゲージ固定項, 96
ゲージ不変性, 93, 102, 103
ゲージ変換, 93, 99, 168
　時間に依存しない—, 94

結節点, 41
Gell-Mann Lowの定理, 69, 230
光学定理, 53
交差対称性, 59
格子場, 209
格子フェルミオン, 219
ゴースト, 97
Goldstoneの定理, 189
Goldstoneボゾン, 190–192
Kogut-Susskindフェルミオン, 224
固定点(繰り込み群の—), 236
　　Wilson-Fisher—, 243
　　自由場—, 241
　　赤外安定な—, 266
　　赤外不安定な—, 275
コヒーレント状態, 201
Compton波長, 13

＜さ＞
散乱断面積, 49
CPT定理, 59
ジェリウムモデル, 119
時間順序化, 29
時間順序化真空期待値(TVEV), 79
軸性ゲージ, 94
σ 模型
　　線形—, 249, 263, 272, 274
　　非線形—, 249, 267, 270
次元正則化, 66
自己エネルギー, 36, 45–47, 59
自然単位系, 13
質量殻, 31, 57, 75, 81
自発的な対称性の破れ, 133, 184
　　—とGoldstoneボゾン, 190
締めつけ特異性, 67, 217
射影演算子, 90
Schwingerの技法, 64
縮約, 33, 92
寿命(粒子の—), 52, 61
Schrödinger描像, 3, 28
Schwarzの鏡像原理, 58
循環 (渦糸の—), 148
準粒子, 114, 139, 207
消滅演算子, 5, 32
常流動成分, 147
真空永続振幅, 35
真空泡, 43
酔歩(格子場の—), 213
スカラー場, 14
スケーリング次元, 240, 242, 247
スピノル場, 83
スペクトル関数, 72
Slater行列式, 111
正規積, 32
正準エネルギー−運動量テンソル, 24
正常閾(しきい)値, 58
生成演算子, 5, 32
生成汎関数, 179
正の振動数の成分, 32
ゼロ音波, 126
遷移行列 (T行列), 49, 53
漸近的自由, 259
漸近場, 77
占有数, 7
相関関数, 70, 75
　　1粒子系の—, 168
　　繰り込まれた場の—, 246
　　スピン−スピン—, 230
　　任意の演算子の—, 239
相関長, 231, 233, 237, 239
相互作用描像, 28
粗視化, 235

＜た＞
大域的変換, 22
対称性因子, 42, 53
大正準ポテンシャル, 153, 154
第二量子化, 109
大分配関数, 153
D'Alembertのパラドックス, 148
端点特異性, 67
置換, 155
秩序パラメーター, 134, 204
中点則(径路積分の—), 167
治癒長, 149
長距離秩序, 157
　　非対角—, 135
超空間, 200
超繰り込み可能, 236
超対称性, 199
超伝導, 203
超場, 200
超ポテンシャル, 200
超流動質量密度, 146
超流動速度, 146
調和結晶, 1
t チャネル, 48
Dirac行列, 82
Diracの海, 87
Dirac方程式, 81
Debye-Hükel遮蔽, 119
Debye振動数, 205
デルタ関数, 7
伝送行列, 228
伝播関数, 30
同時刻交換関係, 4, 10

Thomas-Fermi近似, 119
Thomas-Reiche-Kuhnの和則, 75
特性曲線 (偏微分方程式の—), 257
凸包(ポテンシャル曲線の—), 185
トレース族, 173

<な>
内積(ベクトルの—), 13, 15
内積(状態間の—), 16–18, 278
内部空間, 20
入射状態(LSZ形式の—), 76
二流体モデル, 146
Noetherの定理, 20

<は>
Heisenberg場, 69
Heisenberg描像, 3, 162
裸の場, 78
波動関数の繰り込み定数, 45, 73
Pfaff多項式, 197
バロトロピックな流れ, 150
反微分, 200
反粒子, 88
BRS変換, 199
BCS理論, 203
非回転的運動, 148
Higgs-Kibble機構, 148, 193
微分, 200
標的空間, 250
Feynman-Kac公式, 165
Feynman規則
　$\lambda\varphi^N$ 理論の—, 46
　量子電磁力学の—, 99
Feynmanゲージ, 96
Feynmanの技法, 64
Feynmanのパラメーター積分公式, 64, 65
Furryの定理, 100
Fermi液体, 114
Fermi気体, 114
Fermiの海, 112
Fermiの“黄金律”, 49
Fermi粒子, 81, 87
　—の重複問題, 223
Fock空間, 7
フォノン, 7
複素スカラー場, 19
物理的な状態, 95, 97
不定計量, 286
負の振動数の成分, 32
普遍性, 239, 263
フラクタル, 234, 240
プラズマ振動, 121
プラズマ振動数, 121
プラズモン, 121
Friedel振動, 121
Brillouin領域, 210
Brueckner-Goldstoneの定理, 44
Breit-Wignerピーク, 61
Fréchet微分, 9
Fresnel積分, 163
Fredholm行列式, 173, 204, 206
ブロックスピン, 235
分解可能な状態, 111
分岐切断線, 57
分岐点, 58
分配関数
　1次元Ising模型の—, 228
　Gauss模型の—, 244
　格子場の—, 210
　線形 σ 模型の—, 272
　場の—, 175
　非線形 σ 模型の—, 250, 267
β 関数, 232, 249
Bethe-Goldstoneの定理, 44
ヘリシティー, 86
Bernoulli方程式, 150
Berezin積分, 195
Perron-Frobeniusの定理, 133
偏極ベクトル, 98
放出状態(LSZ形式の—), 76
Bose凝縮, 132
Bohm-Staverの関係, 129
Bogoliubov変換, 137
ホットダークマター, 86
Boltzmann方程式, 115
Borchers類, 79
Poisson分布, 38
Poisson方程式, 119

<ま>
Meissner効果, 148
Maxwell混合相生成, 185
松原振動数, 158
Madelung変換, 147
Minkowski空間, 13
無効な摂動, 236
Mössbauer効果, 38
Møller散乱, 100
Møllerの波動演算子, 70

<や>
Euclid空間, 62
有効作用, 183
有効な摂動, 236
有効ポテンシャル, 184
u チャネル, 48, 58

湯川ポテンシャル, 37
ユニタリー性, 53

＜ら＞
ラグランジアン密度, 11
ラピディティー, 277
Landau-Cutkoskiの切断公式, 55
Landau減衰, 124
Landau臨界条件, 143
量子圧力, 150
量子電磁力学, 93
臨界点, 227, 232
臨界面, 239
Rayleigh-Schrödinger摂動, 54, 100
Lehmann-Källén表示, 72
連続極限
　　繰り込み群と—, 231, 233
　　結晶場の—, 7
　　格子理論の—, 218
Lorentzゲージ, 95
Lorentz不変な規格化, 16, 91
Lorentz不変な相空間(LIPS), 16
ロトンの極小点, 142
London侵入長, 148

＜わ＞
Weyl表示, 85
Weylフェルミオン, 86
Weyl方程式, 86

著　者　M. ストーン（Michael Stone）

Loomis Laboratory
Department of Physics
University of Illinois
Urbana, IL 61801
USA

訳　者　樺沢 宇紀（かばさわ うき）

1990年　大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻前期課程修了
〃　（株）日立製作所 中央研究所 研究員
1996年　（株）日立製作所 電子デバイス製造システム推進本部 技師
1999年　（株）日立製作所 計測器グループ エレクトロニクスシステム本部 技師
2001年　（株）日立ハイテクノロジーズ 設計・製造統括本部 那珂事業所 技師

著書：*Studies of High Temperature Superconductors*, Vol.1（共著，Nova Science，1989年）
Studies of High Temperature Superconductors, Vol.6（共著，Nova Science，1990年）

訳書：「多体系の量子論」（シュプリンガー・フェアラーク東京，1999年）
「現代量子論の基礎」（丸善プラネット，2000年）
「メソスコピック物理入門」（吉岡書店，2000年）

量子場の物理　定価（本体4,000円＋税）

発　行　2002年2月22日
著　者　M. ストーン
訳　者　樺沢 宇紀
発行者　平野 皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033 東京都文京区本郷3丁目3番13号
TEL (03) 3812-0757（営業直通）
印刷所　日本ハイコム株式会社

ISBN 4-431-70940-1　C3042　http://www.springer-tokyo.co.jp